

DANIEL YOSHIO FUTENMA DA SILVA

**Simulação Numérica e Visualização do Escoamento ao redor de
cilindros com elevada razão de aspecto**

**São Paulo
2010**

DANIEL YOSHIO FUTENMA DA SILVA

**Simulação Numérica e Visualização do Escoamento ao redor de
cilindros com elevada razão de aspecto**

**Relatório final da disciplina
PME2600 – Projeto Integrado III**

**Área de concentração:
Engenharia Mecânica.**

**Orientador:
Prof. Dr. Júlio Romano Meneghini**

**São Paulo
2010**

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Daniel Yoshio Futenma

Simulação numérica e visualização do escoamento ao redor de cilindros com elevada razão de aspecto / D.Y.F. Silva. – São Paulo, 2010.

70 p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecânica.

**1. Escoamento (Simulação numérica) 2. Tubos flexíveis
3. Vórtices dos fluídos 4. Vibrações I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecânica II. t.**

Índice

Resumo	VI
1 Introdução.....	1
2 Fundamentos da Mecânica dos Fluidos.....	3
2.1 Camada Limite	3
2.2 Vórtices.....	5
2.3 Leis Fundamentais.....	10
3 Modelagem	13
3.1 Método dos Vórtices Discretos	14
3.1.1 Cálculo das forças hidrodinâmicas	17
3.2 Integração Anflex-MVD.....	24
3.2.1 Método dos Elementos Finitos	25
3.2.2 Anflex	26
3.3 Acoplamento Hidro-elástico.....	29
4 Visualização.....	30
4.1 Visualizador.....	31
5 Resultados.....	34
5.1 Coeficiente de Arrasto	34
5.2 Visualização.....	37
6 Conclusão	60
Apêndice A.....	61
Bibliografia.....	67

Índice de Figuras

Figura 2.1 Distorção de uma partícula fluida enquanto escoia numa camada limite – extraída de MUNSON [1].	4
Figura 2.2 Modelo de formação de vórtice	5
Figura 2.3 Formação dos vórtices $Re = 140$ – Reproduzido de [3] POTTER, WIGGERT.	6
Figura 2.4 Formação de vórtice na ponta de asa de avião - extraída de NASA [4].	7
Figura 2.5 Regimes de emissão de vórtices para cilindros lisos – extraída de MENEGHINI [2].	8
Figura 3.1 Faixa bidimensional.	13
Figura 3.2 Distância de criação do vórtice - reproduzido de YAMAMOTO [7] ..	15
Figura 3.3 Coordenadas normal e tangencial	17
Figura 3.4 Sistema de coordenadas do cilindro acelerado.	21
Figura 3.5 Subdivisão em elementos e os graus de liberdade– reproduzido de MENEGHINI [6].	25
Figura 4.1 Distribuição ponderada da vorticidade por um vórtice numa célula.	30
Figura 4.2 Escala de cores RGB	32
Figura 4.3 Detalhamento	33
Figura 5.1 Coeficiente de Sustentação ao longo do tempo	36
Figura 5.2 Início da simulação	37
Figura 5.3 Terceiro passo no tempo	38
Figura 5.4 Quinto passo no tempo	38
Figura 5.5 Sexto passo no tempo	39
Figura 5.6 Décimo passo no tempo	39
Figura 5.7 Décimo quinto passo no tempo	40
Figura 5.8 Vigésimo passo no tempo	41
Figura 5.9 Trigésimo passo no tempo	41
Figura 5.10 Trigésimo Quinto passo no tempo	42
Figura 5.11 Quadragésimo passo no tempo	43
Figura 5.12 Quinquagésimo passo no tempo	43
Figura 5.13 Sexagésimo passo no tempo	44
Figura 5.14 Septuagésimo passo no tempo	44
Figura 5.15 Octogésimo passo no tempo	45
Figura 5.16 Nonagésimo passo no tempo	45
Figura 5.17 Centésimo passo no tempo	46
Figura 5.18 Início do desprendimento do vórtice superior	47
Figura 5.19 Desprendimento do vórtice superior	47
Figura 5.20 Início do desprendimento do vórtice inferior	48
Figura 5.21 Início do desprendimento do 2º vórtice superior	48
Figura 5.22 Início do regime dos desprendimentos de vórtices.	49
Figura 5.23 Regime dos desprendimentos de vórtices	50
Figura 5.24 Regime dos desprendimentos de vórtices vista afastada	50
Figura 5.25 Regime dos desprendimentos de vórtices	51
Figura 5.26 Regime dos desprendimentos de vórtices com vista deslocada à direita	51
Figura 5.27 Regime dos desprendimentos de vórtices com vista ligeiramente angulada.	52

Figura 5.28 Regime dos desprendimentos de vórtices com vista bem angulada	52
Figura 5.29 Início do desprendimento de vórtices	53
Figura 5.30 Formação das duas bolhas de separação simétricas	54
Figura 5.31 Quadragésimo passo no tempo	54
Figura 5.32 Quinquagésimo passo no tempo	55
Figura 5.33 Contorno de vorticidade do primeiro vórtice superior a ser desprendido	56
Figura 5.34 Contorno de vorticidade do primeiro vórtice inferior a ser desprendido	56
Figura 5.35 Contorno de vorticidade do início do regime de desprendimento de vórtices	57
Figura 5.36 Contorno de vorticidade durante o regime	58
Figura 5.37 Contornos de vorticidade com por outro ângulo	58
Figura 5.38 Contornos de vorticidade de forma aproximada	59

Resumo

Este trabalho tem por objetivo abordar o problema de interferência fluido-estrutura. Pretende-se investigar o comportamento de um riser, que é um elemento tubular muito utilizado em plataformas “offshore” de produção de petróleo.

Para simulação do riser imerso no escoamento dispõe-se do programa Anflex fornecido pela Petrobrás adaptado com rotinas de CFD (Dinâmica dos Fluidos Computacional) desenvolvidas no NDF (Núcleo de Dinâmica dos Fluidos) da Escola Politécnica da USP.

Pretende-se comparar os resultados obtidos para os coeficientes de arrasto com alguns resultados da literatura, e posteriormente, gerar a visualização dos vórtices e seus respectivos contornos de vorticidade através de uma ferramenta gráfica que foi desenvolvida pelo aluno na Iniciação Científica.

1 Introdução

O estudo das emissões de vórtices e dos fenômenos físicos relacionados aos mesmos é importante, uma vez que estes estão presentes em diversas áreas da engenharia, como em pontes, prédios, linhas de transmissão, aviões, estruturas marítimas e oceânicas.

Existem estruturas que estão imersas em escoamentos de fluidos que podem atingir à condição de separação da camada limite na superfície do corpo e gerar o desprendimento de vórtices alternados, conhecido como “vortex shedding” e induzir vibrações na estrutura, VIV (vibrações induzidas por vórtices).

Concentrando nossa atenção no processo de perfuração e extração de petróleo e gás em águas profundas, fluidos deslocam-se entre o fundo do mar e a plataforma na superfície do oceano por meio de estruturas delgadas cilíndricas denominadas “risers”. O riser, que é muito utilizado na indústria “offshore”, é um elemento tubular que conduz os produtos de extração dos poços às plataformas, e está sujeito à ação de carregamento devido às ondas e correntes marítimas.

Por isso é fundamental que as características críticas dessas estruturas, que estão sujeitas ao fenômeno de VIV, sejam reconhecidas para que não nos deparemos com situações indesejadas, tais como ruptura por fadiga da estrutura, colisão devido a amplitude de vibração e conseqüentes danos ambientais.

A busca pelo entendimento do comportamento deste tipo de estrutura se torna bastante atraente, devido a importância que a produção de petróleo em plataformas *offshore* tem em nossa sociedade.

Campos de petróleo são encontrados a lâminas d’água cada vez mais profundas e em condições ambientais desfavoráveis. A PETROBRÁS é reconhecida internacionalmente como referência em inovação e pesquisa em exploração e produção em águas profundas. Foram consecutivos os recordes e hoje a meta é disponibilizar tecnologias para produção de petróleo e gás natural a profundidades superiores a 3.000m.

Este trabalho tem por objetivo abordar o problema de interferência fluido-estrutura. Para simulação do riser imerso no escoamento dispõe-se do programa Anflex fornecido pela Petrobrás adaptado com rotinas de CFD (Dinâmica dos Fluidos Computacional) desenvolvidas no NDF (Núcleo de Dinâmica dos Fluidos) da Escola Politécnica da USP.

O programa Anflex é uma ferramenta computacional desenvolvida pela Petrobrás para análise de risers, que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) para determinar a dinâmica estrutural dos mesmos. As rotinas de CFD utilizam o Método dos Vórtices Discretos (MVD) para modelar a influência do fluido na estrutura. Através de um processo iterativo, essas rotinas possibilitam o cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos que são fornecidos ao Anflex, permitindo assim a determinação e avaliação dos deslocamentos do riser em cada instante de tempo.

A utilização de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) para investigar estes escoamentos é particularmente atraente. Com a CFD é possível obter detalhes do escoamento, muitas vezes de difícil obtenção experimental. Com estes fatores em mente, a presente proposta de trabalho visa utilizar CFD para se analisar o escoamento em torno de um cilindro.

2 Fundamentos da Mecânica dos Fluidos

Os escoamentos externos sobre corpos apresentam uma grande variedade de fenômenos de mecânica dos fluidos. As características do escoamento dependem da forma do corpo imerso e velocidade, orientação e propriedades do fluido que escoar sobre o corpo.

No presente trabalho, estudaremos corpos rombudos, mais especificamente corpos com geometrias cilíndricas. A seguir veremos alguns conceitos fundamentais que sustentam o presente trabalho desenvolvido.

2.1 Camada Limite

Como visto em MUNSON [1], a hipótese fundamental da teoria de fluido ideal assume que numa superfície qualquer no interior do fluido as ações exercidas nesta superfície consistem somente em ações normais, ou seja, pressão. Sabemos, no entanto, que em um fluido real ocorrem, além das tensões normais, tensões tangenciais. Estas últimas são causadas pela viscosidade.

De acordo com MENEZHINI [2], em 1904 Prandtl propôs que havia uma pequena região próxima à parede do corpo na qual os efeitos viscosos eram importantes. No restante do escoamento, o fluido comporta-se como invíscido, ou seja, a viscosidade não era tão importante e, devido a isto, a teoria potencial fornecia resultados próximos aos observados experimentalmente. As linhas de corrente que eram observadas experimentalmente eram muito próximas daquelas obtidas pela teoria potencial. É claro que a viscosidade dinâmica é a mesma em todo o escoamento. Assim, somente a importância relativa de seus efeitos que é diferente.

A condição de aderência, na qual o efeito da viscosidade é fazer com que não haja deslizamento do fluido junto à parede, foi postulada por Prandtl quando do desenvolvimento de sua teoria. A pequena região do escoamento próxima à parede, na qual os efeitos viscosos são importantes, foi chamada por Prandtl de camada limite. Quando uma partícula entra na camada limite, ela

começa a distorcer devido ao gradiente de velocidade do escoamento – a parte superior da partícula apresenta velocidade maior do que aquela na parte inferior. O fluido não tem rotação quando escoava fora da camada limite, mas começa a rotacionar quando atravessa a superfície fictícia da camada limite, conforme a Figura 2.1.

A espessura da camada limite, δ , não pode ser observada em um escoamento real. Ela será definida arbitrariamente como o conjunto de pontos nos quais a velocidade é igual a 99% de velocidade da corrente livre.

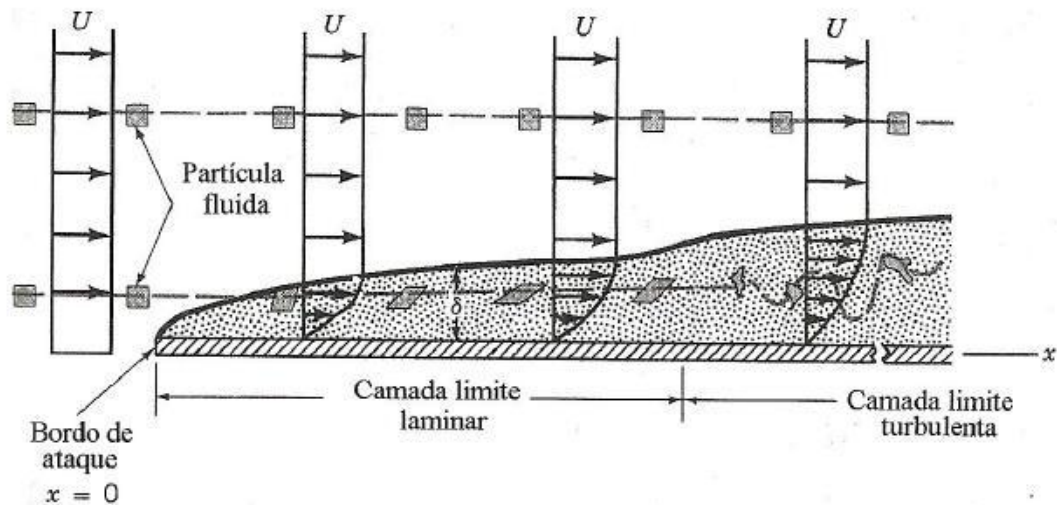


Figura 2.1 Distorção de uma partícula fluida enquanto escoava numa camada limite – extraída de MUNSON [1].

Com a teoria da camada limite proposta por Prandtl podemos analisar o escoamento ao redor de um corpo afilado dividindo-o em duas regiões distintas: a) a região na qual a ação das forças viscosas é importante, esta região é contígua aos contornos sólidos e foi denominada por Prandtl de camada limite; b) a região na qual a ação da viscosidade é desprezível, prevalecendo o modelo de fluido ideal para o qual é aplicável a teoria do escoamento potencial.

No caso de um corpo rombudo, como um cilindro circular, esta análise é mais complexa, pois além das duas regiões citadas, temos uma terceira: c) uma região caracterizada pela presença de recirculação, formada por vórtices. Estes são formados e desprendidos devido à interação das camadas cisalhantes, as quais se formaram devido à separação da camada limite. Esta

região é caracterizada pela existência de pacotes de fluido com vorticidade elevada e de sinais opostos, e será explicada de forma mais detalhada a seguir na Figura 2.2.

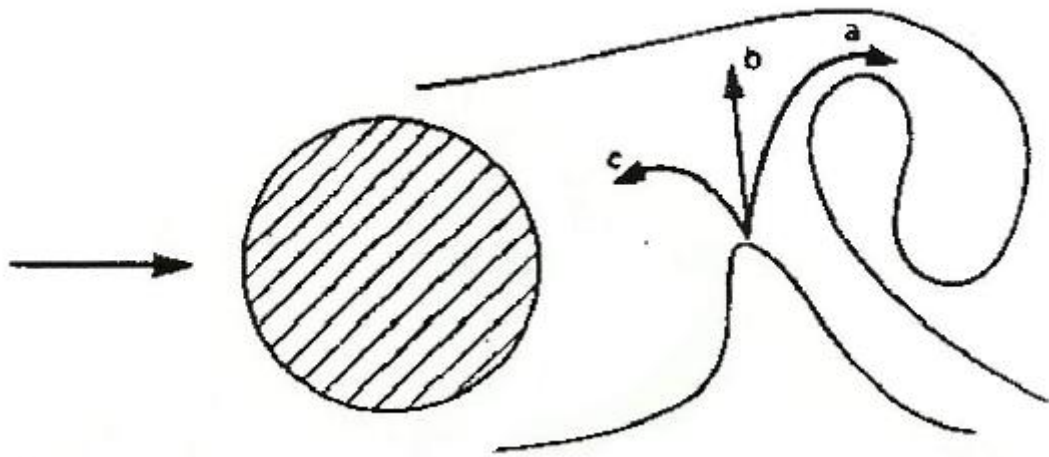


Figura 2.2 Modelo de formação de vórtice

2.2 Vórtices

Quando o escoamento externo à camada limite possuir um gradiente de pressões adverso, isto é, quando $dp/dx > 0$, as partículas de fluido perdem energia cinética devido ao atrito e também devido a este gradiente. Esta condição adversa poderá provocar não apenas a anulação da velocidade, mas até mesmo uma inversão do sentido do fluxo. Quando isto ocorre, dizemos que ocorreu a separação.

A ocorrência dessa separação faz com que haja a formação de duas camadas cisalhantes livres na região imediatamente posterior ao corpo, e é um elemento decisivo na formação dos vórtices. Um vórtice cresce ganhando circulação oriunda da camada cisalhante a qual ele está conectado. Em certo instante, o vórtice que está crescendo torna-se suficientemente intenso para atrair a camada cisalhante oposta. Esta atração se dá devido à velocidade induzida pelo vórtice em crescimento. A aproximação de fluido com vorticidade oposta, em uma concentração suficiente intensa, interrompe a alimentação de circulação do vórtice em crescimento e então, ele é desconectado da camada

cisalhante e a seguir, convectado para jusante do escoamento, formando a esteira.

Estas duas camadas com vorticidade de sinais opostos constituem um sistema instável quando pequenas perturbações estão presentes e certas condições são satisfeitas. A interação destas duas camadas cisalhantes de fluido é não-linear e representa a razão principal da formação e desprendimento de vórtices atrás do corpo, como pode ser observado na Figura 2.3

O estudo deste fenômeno é necessário na estimativa da vida útil dos componentes de sistemas oceânicos, pois as forças cíclicas que atuam sobre a estrutura, levam ao surgimento de oscilações do corpo que, dependendo da frequência desta excitação, são capazes de sintonizar simultaneamente diferentes modos naturais destes elementos, podendo em casos extremos levar à fadiga e ao colapso da estrutura.

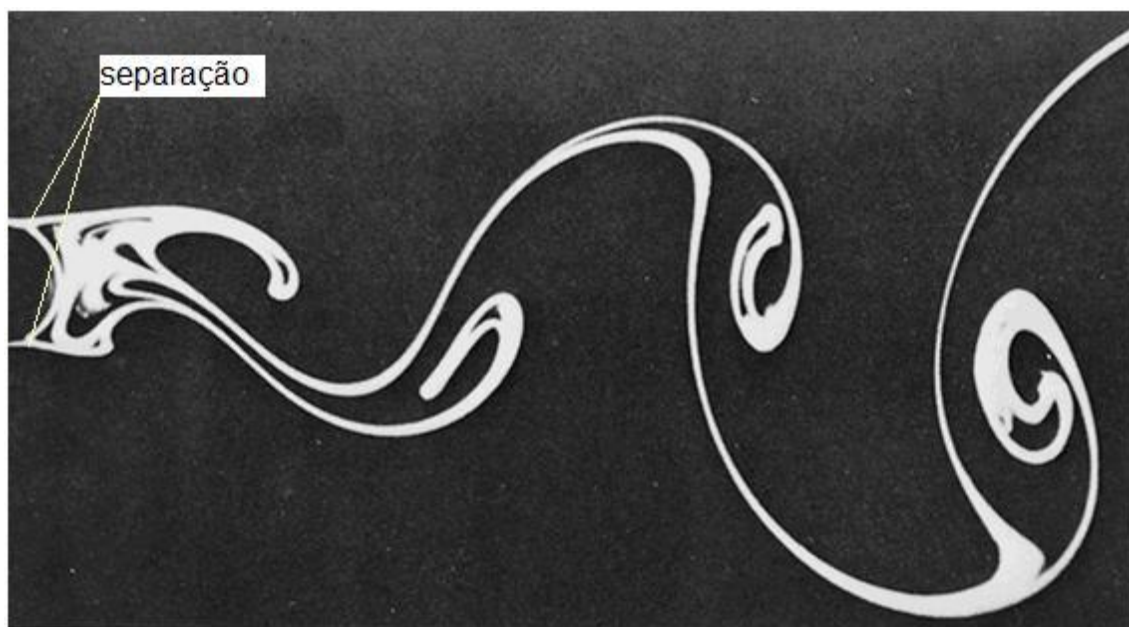


Figura 2.3 Formação dos vórtices $Re= 140$ – Reproduzido de [3] POTTER, WIGGERT.

Como já dito, vórtices são regiões do fluido com alta vorticidade advindo da tentativa do fluido em contornar dos movimentos realizados pelo fluido ao redor de um centro de rotação. Eles são encontrados nas mais diversas condições de escoamento do fluido, como linhas de transmissão, prédios, pilares e pontas de asa, como vistos na Figura 2.4 .



Figura 2.4 Formação de vórtice na ponta de asa de avião - extraída de NASA [4]

Vorticidade é um conceito matemático que pode ser entendido como a quantidade de circulação ou rotação de um fluido por unidade de área de um ponto no campo de escoamento. A rigor, vorticidade é definida como

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} \quad (2.1)$$

No caso de um escoamento bidimensional, a componente z da vorticidade é

$$\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.2)$$

A vorticidade está relacionada com a circulação através do teorema de Stokes

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{V})_z dx dy = \int \omega_z dx dy \quad (2.3)$$

Essa formação de carregamentos cíclicos induz vibrações na estrutura, que são conhecidos como VIV, vibração induzida por vórtices, é extremamente dependente do número de Reynolds, que é dado por:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{U D}{\nu} \quad (2.4)$$

onde ρ é a densidade do fluido, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, ν é a viscosidade cinemática do fluido, U é a velocidade do fluido ao longe e D é o diâmetro do cilindro.

A forma com que Re influencia o escoamento é ilustrada na Figura 2.5, e pode ser vista com mais detalhes em MENEHINI [2].

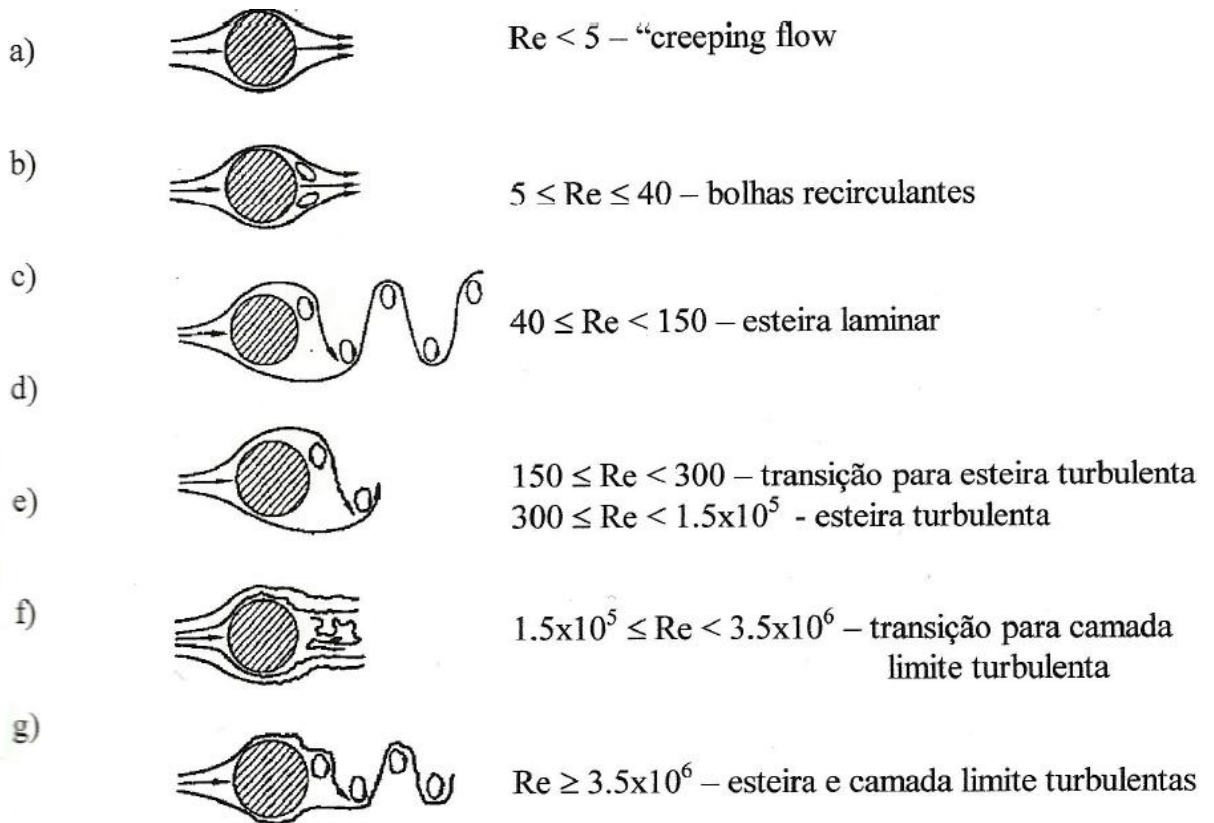


Figura 2.5 Regimes de emissão de vórtices para cilindros lisos – extraída de MENEHINI [2]

De forma resumida:

- a) Este regime também conhecido como “creeping flow”, que ocorre para $Re < 5$, o fluido segue o contorno do cilindro, não havendo separação.
- b) Regime que ocorre entre $5 \leq Re \leq 40$, ocorre separação do escoamento, porém não há emissão de vórtices, apenas a formação de duas bolhas de recirculação;
- c) Neste regime, para $40 \leq Re \leq 150$, a esteira torna-se instável, e começa o desprendimento de vórtices;
- d) Regime para $150 \leq Re \leq 300$, a esteira torna-se turbulenta, porém a camada limite permanece laminar;
- e) Regime, para $300 \leq Re \leq 1,5 \cdot 10^5$, é a faixa sub-crítica. Nesta faixa, a separação ocorre a um ângulo de cerca de 80° , e a emissão de vórtices é forte e periódica;
- f) A faixa de transição, para $1,5 \cdot 10^5 \leq Re \leq 3,5 \cdot 10^6$, a camada limite torna-se turbulenta, o ponto de separação ocorre a cerca de 140° , e o arrasto cai dramaticamente. Esta é a chamada crise do arrasto e a emissão regular de vórtices é quebrada, devido a bolhas de separação laminar e efeitos tridimensionais, e a esteira apresenta-se desorganizada e estreita;
- g) Para $Re \geq 3,5 \cdot 10^6$, a emissão regular de vórtices é restabelecida, com a esteira e a camada limite completamente turbulentas;

As primeiras observações do fenômeno de emissão de vórtices foram registradas pelos antigos gregos, que descreveram os chamados “Aeolian Tones”, sons provenientes de cordas tensionadas vibrando ao vento. No século XV, Leonardo da Vinci desenhou uma fileira de vórtices na esteira de um pilar de uma ponte. No entanto somente a partir do séc. XIX os primeiros estudos formais acerca do fenômeno de emissão de vórtices foram realizados. Em 1878, Strouhal verificou que os “Aeolian Tones” eram proporcionais à velocidade do vento dividido pelo diâmetro da corda.

Em 1879, Rayleigh verificou que uma corda de violino submetida a um fluxo de ar, contrariamente ao que se supunha, vibrava principalmente na direção transversal do escoamento. E em 1896, definiu um parâmetro adimensional, que mais tarde passou a ser conhecido como número de

Strouhal – que relaciona a velocidade do escoamento com a frequência de emissão de vórtices.

$$S = \frac{fD}{U} \quad (2.5)$$

No Gráfico 1 mostra a relação entre o número de Strouhal e o número de Reynolds para cilindros fixos de superfície lisa e rugosa. Observa-se que a frequência de emissão de vórtices apresenta um valor praticamente constante, em torno de 0,21, para uma larga faixa de número de Reynolds. Na faixa correspondente à faixa de transição, onde a camada limite torna-se turbulenta, o número de Strouhal para cilindros lisos apresenta um salto, chegando a um valor igual a 0,47 e a seguir uma recuperação para cerca de 0,25.

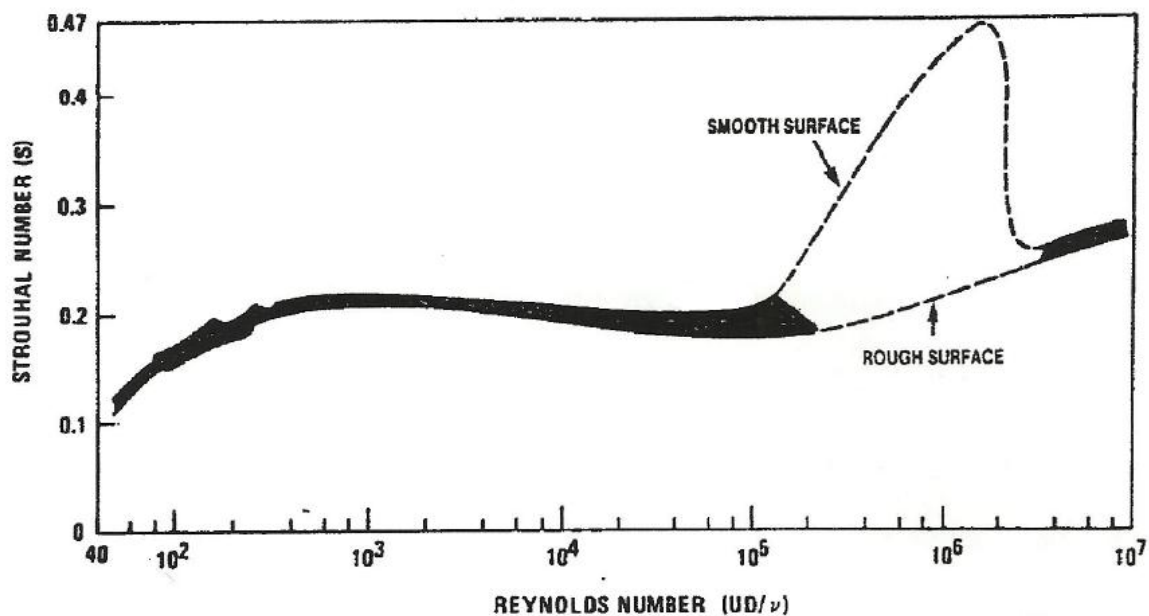


Gráfico 1 Relação entre números de Strouhal e Reynolds -- extraída de MENEGHINI [2]

2.3 Leis Fundamentais

As grandezas de interesse fundamental na mecânica dos fluidos estão contidas em três leis básicas: a conservação de massa, a primeira lei da termodinâmica e a Segunda Lei de Newton. Essas leis básicas são expressas usando a descrição lagrangiana em termos de um sistema, um conjunto fixo de partículas materiais, conforme observado em [4] POTTER, WIGGERT

1. Conservação de Massa: a massa de um sistema permanece constante.

$$\frac{D}{Dt} \int_{sist} \rho dV = 0 \quad (2.6)$$

2. Primeira Lei da Termodinâmica: a taxa de transferência de calor para um sistema menos a taxa à qual o sistema realiza trabalho é igual à taxa à qual a energia do sistema está mudando.

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{D}{Dt} \int_{sist} e \rho dV \quad (2.7)$$

Em que a energia específica e leva em consideração a energia cinética, potencial e interna por unidade de massa.

3. Segunda Lei de Newton: a força resultante agindo no sistema é igual à taxa à qual a quantidade de movimento do sistema está mudando.

$$\Sigma F = \frac{D}{Dt} \int_{sist} V \rho dV \quad (2.8)$$

A conservação de massa, aplicada a um elemento infinitesimal, leva à equação diferencial de continuidade; ela relaciona os campos de massa específica e de velocidade. A segunda Lei de Newton resulta em três equações diferenciais, conhecidas como equações de Navier-Stokes; elas relacionam os campos de velocidade, pressão, massa específica e introduzem a viscosidade e o vetor de gravidade em um escoamento. A primeira Lei da Termodinâmica fornece a equação diferencial da energia que relaciona o campo de temperatura aos campos de velocidade, massa específica e pressão, e introduz o calor específico e a condutividade térmica.

De forma simplificada, a maioria dos problemas refere-se a escoamentos isotérmicos e incompressíveis, nos quais o campo de temperatura não exerce influência; para tais escoamentos, as três equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade fornecem quatro equações diferenciais parciais que

relacionam as três componentes de velocidade e a pressão. Assim, a equação da energia não seria necessária.

As equações diferenciais parciais requerem condições que especifiquem certos valores para as variáveis dependentes em valores particulares das variáveis independentes, ou seja, condições iniciais e de contorno.

A equação diferencial da continuidade, para um escoamento compressível é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.9)$$

E as expressões advindas das equações diferenciais de movimento, conhecidas como equações de Navier-Stokes, são dadas por:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.10)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.11)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.12)$$

A dedução destas expressões pode ser acompanhada no Anexo A.

Os problemas de escoamento de fluidos, conforme já dito, são regidos por estas equações. Essas equações, formam um sistema de equações diferenciais parciais (EDP's) acopladas quase-lineares. Em termo dos termos não-lineares nessas EDP's, os métodos analíticos podem produzir poucas soluções. Em geral, as soluções analíticas são possíveis somente se essas EDP's podem ser linearizadas, ou porque os termos não-lineares são naturalmente eliminados ou porque os termos não-lineares são pequenos quando comparados aos outros termos, de forma a serem desprezados. Se as não linearidades nas EDP's governantes não podem ser desprezadas, que é a situação para a maior parte dos escoamentos de engenharia, são necessários métodos numéricos para a obtenção da solução. As técnicas de CFD visam a obtenção de soluções numéricas para estes problemas.

3 Modelagem

Uma análise estrutural de sistemas em engenharia requer uma idealização dos mesmos, de uma forma em que possa ser analisado. A definição das variáveis que governam o problema, a formulação de equações e sua solução, e por fim as interpretações dos resultados constituem as principais etapas da análise.

Usualmente se pode determinar a resposta de um sistema através de um conjunto de equações e das condições de contorno pertinentes. Para um sistema contínuo, entretanto, o número de incógnitas é infinito, tornando necessária a sua representação através de um sistema discreto aproximado, com um número finito de graus de liberdade.

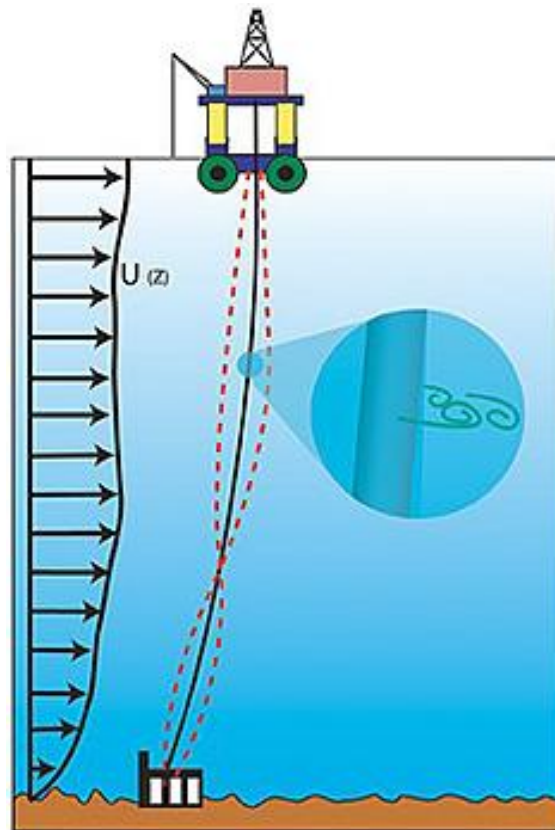


Figura 3.1 Faixa bidimensional

Para o caso em questão, o estudo de um riser submerso, dispõe-se do programa Anflex fornecido pela Petrobrás. Tal programa busca resolver a dinâmica estrutural do riser, através do Método dos Elementos Finitos e modela a interferência do fluido no mesmo, através de técnicas de CFD. Além disso, há rotinas do Método dos Vórtices Discretos desenvolvidas no NDF (Núcleo de Dinâmica dos Fluidos) acopladas ao Anflex. Isto será detalhado mais adiante.

As forças hidrodinâmicas são obtidas por meio de simulações bidimensionais de escoamento. Cada nó do modelo estrutural tem uma faixa bidimensional correspondente, como visto na Figura 3.1. Vale lembrar que a interação entre as faixas de escoamento é dada apenas pelo comportamento da estrutura.

3.1 Método dos Vórtices Discretos

No Anflex as cargas hidrodinâmicas são obtidas através do Modelo de Morison. O cálculo dessas forças hidrodinâmicas induzidas pelas ondas sobre os membros estruturais é realizado em duas etapas. Primeiramente é realizado o cálculo de velocidades e acelerações das partículas fluidas, baseado na teoria linear de Airy, e posterior transformação dessas grandezas em forças atuantes sobre os membros da estrutura, através da Fórmula de Morison.

Entretanto, de acordo com LIMA [5] o fenômeno de VIV não era captado devido ao fato das forças serem estimadas pela equação de Morison. Daí então que se faz uso do Método dos Vórtices Discretos (MVD), que são rotinas de CFD e que foram acopladas ao Anflex pelo NDF-USP. Este método é uma técnica Lagrangeana, pois as propriedades do escoamento são transportadas por partículas, no caso os vórtices, e é utilizado principalmente para estudar escoamentos reais, onde existem regiões com elevada vorticidade.

Esse enfoque Lagrangeano apresenta a grande vantagem de não necessitar de uma discretização total da região onde se propaga o escoamento, ou seja, ele não necessita de malhas computacionais. Destacando-se ainda a facilidade de implementação para escoamentos de corpos rombudos com geometrias arbitrárias e situações com vários corpos imersos no fluido.

É possível simular escoamentos reais bidimensionais, incompressíveis e viscosos. Na versão do MVD utilizada para as simulações dos problemas envolvendo acoplamento hidrodinâmico, como visto em FREGONESI [6], o corpo é discretizado em N_w painéis e N_w vórtices discretos com circulação Γ_i são gerados a uma distância σ_0 da superfície, como pode ser visto na Figura 3.2, a cada instante de tempo, de forma a modelar a geração de vorticidade na camada limite.

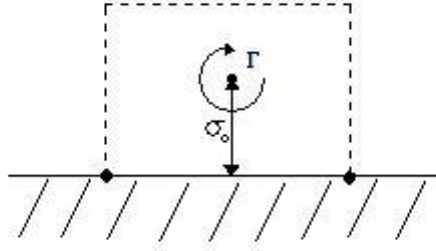


Figura 3.2 Distância de criação do vórtice - reproduzido de YAMAMOTO [7]

Estes vórtices são convectados com velocidades que são avaliadas através da soma da contribuição devido ao escoamento uniforme ao longe e as velocidades induzidas por todos os outros vórtices. Estas últimas são calculadas através da equação de Biot-Savart, na qual U_θ , a velocidade induzida por um vórtice de circulação .

A circulação Γ é dada por :

$$\Gamma = \int \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dA = \oint \vec{v} d\vec{l} \quad (3.1)$$

E a velocidade induzida é dada por

$$U_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.2)$$

Porém pode-se observar que a velocidade induzida no centro do vórtice é infinita, o que na realidade não é verdade. Para corrigir isto, Spalart e Leonard propuseram uma formulação alternativa, na qual assume-se que o vórtice

possua um núcleo σ , chamado também de core, na qual a velocidade no centro do vórtice é nula, cresce até o limite do núcleo e depois decai. Desta forma a velocidade induzida pelo vórtice é dada por:

$$U_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r^2 + \sigma^2} \quad (3.3)$$

Como em MENECHINI [8], o núcleo σ é utilizado para modelar o efeito da viscosidade. Basicamente o núcleo aumenta de tamanho a cada intervalo de tempo, induzindo uma velocidade menor nos vórtices ao seu redor ao longo do tempo.

Considerando que N_w vórtices são gerados a cada passo de tempo, o número total de vórtices N_t nos cálculos cresce rapidamente, fazendo com que o custo computacional fique excessivo. Faz-se então necessária a utilização de um procedimento para manter o número de vórtices dentro de certos limites. Por esta razão utiliza-se um esquema de amalgamação dos vórtices, em cujo procedimento procura-se unir dois vórtices quando certas condições são satisfeitas. Esta amalgamação ocorre preservando a circulação total do escoamento e quantidade de movimento.

Como em FREGONESI [6] ou em YAMAMOTO [7], a força total atuante no cilindro pode ser obtida por meio da integração do campo de pressões (as forças geradas podem ser divididas devido à circulação e à aceleração do corpo) e das tensões de cisalhamento. A expressão que relaciona a pressão e a circulação gerada ao redor do corpo é derivada das equações de Navier-Stokes. A dedução pode ser acompanhada a seguir. A cada instante de tempo são calculados os coeficientes de arrasto e de sustentação (C_d e C_l) dados por:

$$C_d = \frac{\vec{F}_{\text{total}} \cdot \vec{e}_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \quad (3.4)$$

$$C_l = \frac{\vec{F}_{\text{total}} \cdot \vec{e}_y}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \quad (3.5)$$

onde $\vec{F}_{\text{total}}$ é a força total por unidade de comprimento, ρ é a densidade do fluido, U é a velocidade ao longo do fluido e D o diâmetro do corpo. O cálculo de $\vec{F}_{\text{total}}$ poderá ser visto a seguir.

3.1.1 Cálculo das forças hidrodinâmicas

O cálculo das forças atuantes no cilindro pode ser feito por meio da integração do campo de pressões e das tensões de cisalhamento, conforme visto em FREGONESI [6]. A expressão que relaciona a pressão e a circulação gerada ao redor do corpo é derivada das equações de Navier-Stokes, e escrevendo-se a equação em função das coordenadas tangenciais e normais ao corpo, conforme mostrado na figura 3.3.

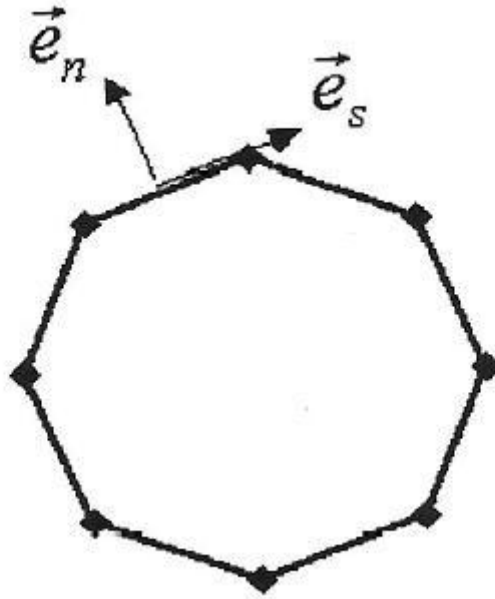


Figura 3.3 Coordenadas normal e tangencial

Para a coordenada tangencial, temos

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + v_n \frac{\partial v_s}{\partial n} = \vartheta \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} + \vartheta \frac{\partial^2 v_s}{\partial n^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (3.6)$$

onde v_s é a velocidade tangencial ao corpo, v_n a velocidade normal, p a pressão, ρ a densidade do fluido, ϑ a viscosidade cinemática.

Como a velocidade normal é nula e pelo princípio a aderência completa, ao lado esquerdo da equação 3.6 é igual a aceleração do corpo $\vec{a}_{corpo}$, projetado na direção tangencial ao corpo e $\vec{e}_s$, o que nos fornece

$$\vec{a}_{corpo}\vec{e}_s = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + \vartheta\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial v_s}{\partial s}\right) + \vartheta\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial v_s}{\partial n}\right) \quad (3.7)$$

Pela equação da continuidade, tem-se que

$$\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0 \quad (3.8)$$

Substituindo-se 3.7 em 3.8,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \vartheta\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{\partial v_n}{\partial n}\right) + \vartheta\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial v_s}{\partial n}\right) - \vec{a}_{corpo}\vec{e}_s \quad (3.9)$$

Rearranjando-se os termos, obtêm-se

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \vartheta\frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{\partial v_n}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial n}\right) - \vec{a}_{corpo}\vec{e}_s \quad (3.10)$$

Assim,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \underbrace{-\vartheta\frac{\partial \omega}{\partial n}}_A - \underbrace{\vec{a}_{corpo}\vec{e}_s}_B \quad (3.11)$$

Os termos A e B da equação B.6 serão tratados separadamente para simplificar o entendimento. Tratando inicialmente do termo A.

Como pode-se ver formalmente em COTTET e KOUMOUTSAKOS (2000) *apud* FREGONESI[6], integrando-se no domínio do fluido a equação de transporte de vorticidade escrita para a parede do corpo e utilizando-se do Teorema de Stokes, chega-se a

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \vartheta \int \frac{\partial \omega(s)}{\partial n} \partial s \quad (3.12)$$

Onde Γ é a circulação e s indica tangência ao corpo. Considerando-se que $\frac{\partial \omega(s)}{\partial n}$, em um dado painel é constante e escrevendo-se o termo da circulação em uma forma discreta, temos que

$$\frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} = \vartheta \frac{\partial \omega}{\partial n} \Delta s \quad (3.13)$$

Onde Δs é o comprimento do painel, $\Delta \Gamma$ é a circulação criada no painel menos a circulação absorvida pelo mesmo.

Substituindo-se 3.13 em 3.11,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \underbrace{-\rho \frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} \frac{1}{\Delta s}}_A - \underbrace{\vec{a}_{corpo} \vec{e}_s}_B \quad (3.14)$$

Para encontrar o campo de pressões, deve-se integrar a expressão 3.14 no contorno. O termo A referente à circulação só pode ser integrado numericamente. O termo B, referente à aceleração do corpo, pode ser integrado analiticamente.

Como interesse final é calcular a força total que o fluido exerce no corpo, a força total será separada em três,

$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{circulação} + \vec{F}_{aceleração} + \vec{F}_{cisalhamento} \quad (3.15)$$

A $\vec{F}_{circulação}$ é a força referente ao termo da circulação, termo A na equação B.9. Será mostrado o cálculo numérico de $\vec{F}_{circulação}$.

A $\vec{F}_{aceleração}$ é a força referente ao termo da aceleração, termo B na equação B.9. A parcela $\vec{F}_{aceleração}$ é calculada analiticamente.

A $\vec{F}_{cisalhamento}$ é a força referente ao cisalhamento que será mostrado posteriormente.

A força do fluido devido à pressão, dada na equação 3.14, pode ser obtida integrando-se o campo de pressões ao redor do corpo,

$$\vec{F}_p = - \oint_S p \vec{e}_n ds \quad (3.16)$$

Separando-se as forças devido à pressão, conforme descrito anteriormente, tem-se a força devido à circulação $\vec{F}_{circulação}$ e à aceleração $\vec{F}_{aceleração}$.

Calculando-se primeiro $\vec{F}_{circulação}$, a parcela da pressão devido à circulação, termo A em 3.14, será diferenciada pelo sobrescrito A. Essa pode ser escrita na forma discreta com sendo

$$\Delta p_{circulação}^A = -\rho \frac{\Delta \Gamma}{\Delta t} \quad (3.17)$$

A parcela da pressão devido à circulação em um determinado painel i será

$$p_i^A = p_0^A - \frac{\rho}{\Delta t} \sum_{j=1}^i \Delta \Gamma_j \quad (3.18)$$

p_0^A é uma pressão referencial e pode ser tomada como zero, $\Delta \Gamma_j$, é a circulação criada no painel j menos a circulação absorvida pelo painel j .

A $\vec{F}_{circulação}$ é então calculada numericamente por meio de

$$\vec{F}_{circulação} = - \sum_{i=1}^{N_w} p_i^A \Delta S_i \vec{e}_{ni} \quad (3.19)$$

Calculando-se agora a parcela da força devido à aceleração $\vec{F}_{aceleração}$, termo B em 3.14. Conforme na figura baixo, considerando-se o caso em que o corpo seja um cilindro de raio r , a aceleração do corpo $\vec{a}_{corpo} = \vec{a}_x \vec{i} + \vec{a}_y \vec{j}$.

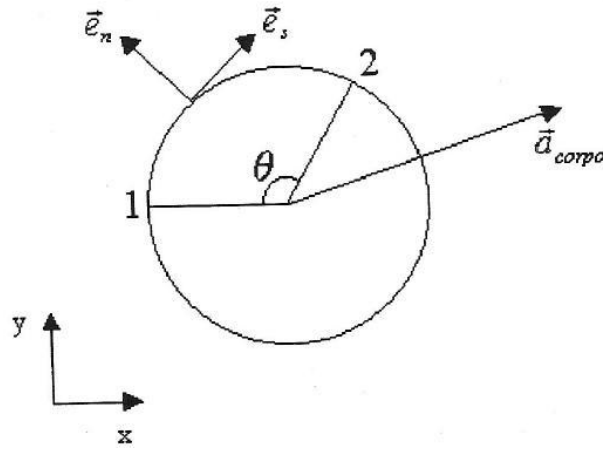


Figura 3.4 Sistema de coordenadas do cilindro acelerado

$\vec{e}_s$ e $\vec{e}_n$ são os versores tangencial e normal ao corpo respectivamente. Escrevendo-se $\vec{e}_s$ e $\vec{e}_n$ em função das coordenadas cartesianas $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$, têm-se

$$\vec{e}_s = \sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \quad (3.20)$$

$$\vec{e}_n = -\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad (3.21)$$

A parcela da pressão no ponto 2, figura 3.4, devido à aceleração será diferenciada pelo sobrescrito B. Essa parcela pode ser calculada da seguinte forma:

$$\int_1^2 \frac{\partial p^B}{\partial s} = - \int_1^2 \rho \vec{a}_{corpo} \vec{e}_s \quad (3.22)$$

Integrando-se o termo a direita,

$$p_2^B = p_1^B - \rho \int_1^2 \vec{a}_{corpo} \vec{e}_s ds \quad (3.23)$$

Escrevendo-se $ds = r d\theta$, $\vec{e}_s$ de acordo com a expressão 4.66 e adotando P_1^B igual a zero, tem-se

$$p_\theta^B = -\rho \int_1^2 (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y) (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) r d\theta \quad (3.24)$$

$$p_{\theta}^B = -\rho \int_0^{\theta} (a_x \sin \theta + a_y \cos \theta) r d\theta \quad (3.25)$$

Resolvendo-se a integral acima, temos

$$p_{\theta}^B = -\rho a_x r (\cos \theta - 1) - \rho a_y r \sin \theta. \quad (3.26)$$

Calculando a força devido ao termo da aceleração,

$$\vec{F}_{aceleração} = -\oint_S p^B \vec{e}_n ds = -\oint_S p^B \vec{e}_n r d\theta \quad (3.27)$$

Inserindo-se p_{θ}^B em $\vec{e}_n$ em 3.27,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{aceleração} = - \int_0^{2\pi} [\rho a_x r (\cos \theta - 1) - \rho a_y r \sin \theta] \cdot (-\cos \theta \vec{e}_x \\ + \sin \theta \vec{e}_y) r d\theta. \end{aligned}$$

Separando-se os termos das forças em $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$

$$\vec{F}_{aceleração} X = \int_0^{2\pi} [\rho a_x r (\cos \theta - 1) - \rho a_y r \sin \theta] \cdot \cos \theta r d\theta \vec{e}_x. \quad (3.28)$$

$$\vec{F}_{aceleração} Y = - \int_0^{2\pi} [\rho a_x r (\cos \theta - 1) - \rho a_y r \sin \theta] \sin \theta r d\theta \vec{e}_y \quad (3.29)$$

Resolvendo-se primeiramente na direção x:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{aceleração} X = \left(\rho a_x r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right. \\ \left. - \rho a_x r^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \rho a_y r^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \right) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Separando-se as integrais,

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \sin \theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Obtendo-se o componente na direção x da $\vec{F}_{aceleração}$

$$\vec{F}_{aceleração} X = (\rho a_x r^2 \pi) \vec{e}_x \quad (3.30)$$

De forma análoga na direção y,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{aceleração} Y = & \left(-\rho a_x r^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \right. \\ & \left. + \rho a_x r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \rho a_x r^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \right) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Resolvendo-se as integrais separadamente,

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = -\cos \theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Obtendo-se a componente na direção y da $\vec{F}_{aceleração}$,

$$\vec{F}_{aceleração} Y = (\rho a_y r^2 \pi) \vec{e}_y \quad (3.31)$$

Assim, a componente da força do fluido correspondente ao termo da aceleração B na equação 3.14 é

$$\vec{F}_{aceleração} = (\rho a_x r^2 \pi) \vec{e}_x + (\rho a_y r^2 \pi) \vec{e}_y \quad (3.32)$$

Calculando-se agora as forças devido às tensões de cisalhamento, sabe-se que

$$\vec{\tau} = \mu \frac{\partial v_s}{\partial n} \vec{e}_s \quad (3.33)$$

Onde τ é a tensão de cisalhamento e μ é a viscosidade dinâmica.

A distância em que a velocidade do fluido é dada por v_s é $2\sigma_0$, podemos então aproximar a derivada como

$$\vec{\tau} = \mu \frac{v_s}{2\sigma_0} \vec{e}_s \quad (3.34)$$

Integrando-se no contorno,

$$\vec{F}_{\text{cisalhamento}} = \int_{\text{Scorpo}} \vec{\tau} dS = \sum_{i=1}^{Nw} \mu \frac{v_{si}}{2\sigma_{0i}} \Delta S_i \vec{e}_s \quad (3.35)$$

Assim, a força total que o fluido exerce no corpo é a soma da força devido às pressões, circulação A e aceleração B, mais a força de corrente do cisalhamento.

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{\text{circulação}} + \vec{F}_{\text{aceleração}} + \vec{F}_{\text{cisalhamento}} \quad (3.36)$$

3.2 Integração Anflex-MVD

Como já mencionado ao longo do texto, nossos risers foram idealizados utilizando o método dos elementos finitos (MEF) implementado no código Anflex criado pela Petrobrás baseado no trabalho de Mourelle (1993) apud Lima. O contínuo, no nosso caso o riser, é subdividido em segmentos menores (elementos) e para cada um deles equações de equilíbrio devem ser satisfeitas. A montagem envolvendo todos os elementos juntamente com a solução do sistema de equações de equilíbrio nos fornece como resposta o comportamento da estrutura.

3.2.1 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos se vale da seguinte idéia para solução sistemática de problemas de engenharia: o contínuo é subdividido em pequenas regiões, como visto na Figura 3.5, o equilíbrio é estabelecido para uma região isoladamente e a solução consiste no cálculo da interação entre as regiões.

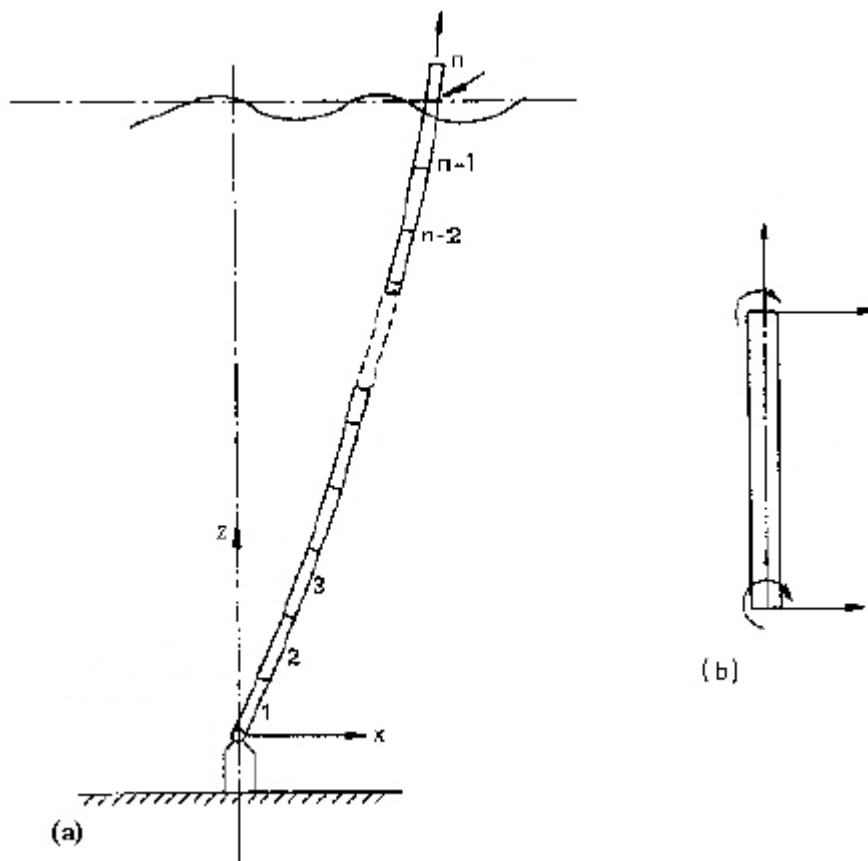


Figura 3.5 Subdivisão em elementos e os graus de liberdade– reproduzido de MENECHINI [6]

Na formulação de um elemento finito, o que se faz é levantar os deslocamentos que descrevem o comportamento do sistema e estabelecer equações de equilíbrio que correspondam a esses deslocamentos desconhecidos. Chega-se, dessa forma, a uma matriz de rigidez do elemento que relaciona valores de forças correspondentes a deslocamentos unitários nas direções consideradas.

Esta ferramenta é utilizada para a resolução da equação do riser vertical, que será apresentada a seguir. O riser pode ser considerado uma viga sujeita a carregamentos distribuídos ao longo de seu comprimento e sua dinâmica estrutural é determinada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

Basicamente este método divide a estrutura analisada em uma quantidade finita de regiões de geometria simples, tais como retas, triângulos ou retângulos. Então a partir dos carregamentos, das equações de equilíbrio, das equações constitutivas e das relações deformação-deslocamento consegue-se determinar toda a dinâmica estrutural do riser.

Cada elemento é governado por uma equação diferencial, sendo esta tratada através de um método variacional e a sua resolução obtida por integração. A solução aproximada em todo o domínio é assumida como uma combinação linear de funções coordenadas, de base ou de interpolação. Normalmente, são utilizados polinômios para tais funções.

3.2.2 Anflex

Neste trabalho não se pretende descrever uma formulação detalhada dos elementos do Anflex, mas apenas se familiarizar com o mesmo.

De acordo com o ANFLEX [9] o sistema Anflex é uma ferramenta computacional para a análise não-linear, estática e dinâmica de risers e de linhas de ancoragem através do Método dos Elementos Finitos (MEF). A integração dos módulos de modelagem, análise e visualização permite ao usuário, em um mesmo ambiente, definir a geometria e os atributos físicos do modelo, obter os resultados da análise estrutural e visualizar graficamente os resultados obtidos. Além disso, o sistema possui interfaces com programas para análise de fadiga e para tratamento de sinais provenientes de análises com mar irregular.

O sistema Anflex tem por objetivo realizar análises estáticas e/ou dinâmicas de estruturas marítimas esbeltas submetidas a grandes deslocamentos, onde os efeitos da não-linearidade geométrica são importantes. O sistema também é capaz de considerar os efeitos das ondas e das correntes marinhas, bem como dos movimentos das embarcações, no comportamento da estrutura.

O sistema possui um campo de aplicação bastante amplo, tais como risers flexíveis, rígidos em catenária, de perfuração e completação, tensionados de plataformas de completação seca e mistos. Além destas, linhas de ancoragem, tendões de plataforma TLP e cenários de instalação.

A seguir são listados resumidamente, os recursos disponíveis no sistema ANFLEX para a análise de risers e de linhas de ancoragem.

- Recursos para modelagem estrutural
 - ✓ Elementos de treliça, pórtico não-linear, cabo-catenária e guincho;
 - ✓ Elementos escalares generalizados para representação de flexjoints;
 - ✓ Elementos escalares pontuais para a modelagem de bóias;
 - ✓ Molas nodais;
 - ✓ Massas distribuídas;
 - ✓ Consideração de trechos de inércia variável;
 - ✓ Consideração de tirantes e pendentos;
 - ✓ Relaxação dinâmica em elementos de pórtico e treliça;
 - ✓ Molas não-lineares para a simulação de contato variável com o fundo;
 - ✓ Fricção com o solo;
 - ✓ Definição do plano de fundos por ângulos.

- Recursos para modelagem de carregamento
 - ✓ Peso próprio e empuxo;
 - ✓ Corrente com perfil poligonal e direção variável;
 - ✓ Onda determinística (teoria linear de Airy) e movimento prescrito relacionado;
 - ✓ Movimento imposto com função de tempo periódica ou definida por tempos;
 - ✓ Mar aleatório e movimento prescrito relacionado;
 - ✓ Transferência de movimento do centro de gravidade do flutuante para diversos pontos da linha;
 - ✓ Cargas concentradas.

O Anflex considera apenas não-linearidade geométrica devido basicamente a grandes deslocamentos e interação axial-transversal que são comuns em sistemas estruturais como os risers. Em estruturas com comportamento linear, os deslocamentos são infinitesimais, fazendo com que a configuração deformada se confunda com a original. No caso de estruturas flexíveis, os deslocamentos podem ter a mesma ordem de grandeza das dimensões da estrutura, fazendo com que seja necessário tratar as equações de equilíbrio na configuração deformada. O procedimento adotado pelo Anflex na resolução da estrutura consiste em realizar uma série de análises lineares sempre em busca de melhores aproximações a cada novo ciclo para o qual o carregamento aplicado é a diferença entre a carga aplicada e as forças resistentes causadas pela deformação da estrutura.

A matriz de rigidez é recalculada no início de cada nova iteração até que o vetor de desequilíbrio atinja a tolerância pré estabelecida. Após a discretização do contínuo, para nosso caso o riser, em elementos finitos, a equação de equilíbrio pode ser representada de acordo com os vetores que compõem o equilíbrio dinâmico de um elemento para um instante de tempo t qualquer:

$$\mathbf{F}_{int}^{(t)} + \mathbf{F}_I^{(t)} + \mathbf{F}_D^{(t)} = \mathbf{F}_{ext}^{(t)} \quad (3.37)$$

sendo os vetores de força:

$\mathbf{F}_{int}^{(t)}$ é o vetor de forças internas.

$\mathbf{F}_I^{(t)}$ é o vetor de forças de inércia.

$\mathbf{F}_D^{(t)}$ é o vetor de forças de amortecimento.

$\mathbf{F}_{ext}^{(t)}$ é o vetor de forças externas no qual o MVD terá influência direta.

A representação da formulação utilizando elementos finitos na discretização espacial é dada na equação (3.38) para a qual

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\}^t + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{u}}\}^t + [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}^t = \{\mathbf{F}\}^t \quad (3.38)$$

em que t representa o instante de tempo correspondente e:

$[M]$ é a matriz de massa.

$[C]$ é a matriz de amortecimento.

$[K]$ é a matriz de rigidez.

$\{F\}$ é o vetor de forças externas (influência direta do MVD no anflexcf).d).

$\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$ e $\{u\}$ são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamentos nodais respectivamente.

Esta representação é obtida a partir da equação fundamental da dinâmica do riser vertical, apresentada a seguir.

3.3 Acoplamento Hidro-elástico

O sistema de equações que determina o comportamento dinâmico do riser vertical sujeito à corrente marítima, dada pela equação, pode ser determinado por meio da interação hidro-elástica entre a parte estrutural, representada pelo lado esquerdo da equação, e a parte hidrodinâmica, representada pelo lado direito da equação. Portanto, a equação pode ser interpretada da seguinte forma:

$$\underbrace{[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\}}_{\text{parcela estrutural}} = \underbrace{\{F\}}_{\text{parcela hidrodinâmica}}$$

Os coeficientes de arrasto e sustentação, C_d e C_l são enviados ao código Anflex no qual são determinados os deslocamentos e deformações, gerando uma nova configuração do riser. Essas novas informações são enviadas à rotina de MVD e são recalculados C_d e C_l , caracterizando assim o processo iterativo, que pode ser equacionado da seguinte maneira:

$$[M]\{\ddot{u}\}^{t+\Delta t} + [C]\{\dot{u}\}^{t+\Delta t} + [K]\{u\}^{t+\Delta t} = \{F\}^t$$

Em suma, é possível criar e editar modelos para análise fornecendo propriedades físicas e geométricas da estrutura, restrições de deslocamentos e rotações, ou seja, os graus de liberdade, e as condições ambientais.

4 Visualização

Conforme o exposto pode-se observar que basicamente o fluido é modelado através dos vórtices gerados que carregam consigo suas propriedades, modificando o escoamento. Desta forma, se torna interessante desenvolver algo, no qual seja possível ter uma idéia da dispersão dos vórtices no escoamento e o seu poder de alterar o escoamento.

No arquivo de saída fornecido pelo Anflex, contém informações como a posição (x,y) e a circulação de cada vórtice em determinado plano z no tempo t. Então será criado um ambiente de visualização, onde será desenhado cada vórtice de acordo com as suas coordenadas (x,y,z,t).

Baseado em MENEZHINI [8], é criada uma malha estruturada na qual será possível calcular a vorticidade em qualquer ponto desta malha. Cada ponto é influenciado pelos vórtices existentes em suas células adjacentes. A influência de um vórtice é ponderada entre os vértices da célula na qual ele está localizado. A vorticidade gerada pelo vórtice em cada vértice é dado por:

$$\omega_{(m)} = \Gamma_k \frac{a_{(m)}}{a^2}$$

onde Γ_k é a circulação, a é a área da célula, $a_{(m)}$ com os índices (m=1,2,3,4) é representado na Figura 4.1.

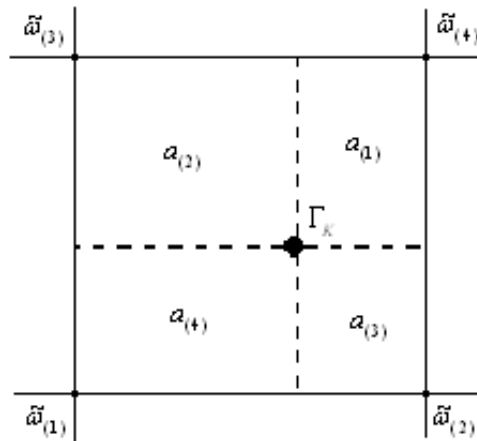


Figura 4.1 Distribuição ponderada da vorticidade por um vórtice numa célula.

4.1 Visualizador

Nas atividades de IC, o aluno desenvolveu o visualizador descrito a seguir.

De acordo com COHEN, MANSSOUR [10], OpenGL é uma poderosa e sofisticada API (Application Programming Interface) que pode ser definida como uma interface para hardware gráfico. Pode ser definida também como uma biblioteca de rotinas gráficas utilizada para o desenvolvimento de aplicações de Computação Gráfica para modelagem bidimensional (2D) e tridimensional (3D). Seu funcionamento é semelhante ao de uma biblioteca de linguagem de programação, ou seja, quando se diz que um determinado programa possui uma aplicação OpenGL, significa que este programa foi escrito em uma linguagem de programação que utiliza uma ou mais bibliotecas OpenGL.

Justamente por ser portátil, a OpenGL possui apenas comandos para modelagem e visualização, não possuindo funções para gerenciamento de janelas, tratamento de eventos ou manipulação de arquivos, sendo necessário o auxílio de outras bibliotecas e *toolkits* para suprir essas deficiências.

As deficiências mencionadas podem ser contornadas pela GLU (*OpenGL Utility Library*) e pela GLUT (*OpenGL Utility Toolkit*), por exemplo. Em COHEN e MANSSOUR [10] pode ser vista a apresentação destas bibliotecas, descritas a seguir.

Entre as funcionalidades da biblioteca GLU, que é instalada junto com a OpenGL, estão o mapeamento de coordenadas entre o espaço de tela e do objeto e o desenho de superfícies quádras.

Já a biblioteca GLUT foi criada a fim de facilitar a interação entre o usuário e o computador, podendo-se criar janelas e interpretar comandos advindos do mouse e/ou do teclado. Existem outros *toolkits* que podem ser utilizados no lugar da GLUT, tais como o FLTK (*Fast Light Toolkit*) e o *wxWidgets*.

Um ponto a ser mencionado é a distinção dos vórtices de circulação positiva e negativa através da diferenciação por cores.

Já com relação aos contornos de vorticidade, foi feita uma escala de cores que se inicia do vermelho, passando pelo verde até chegar ao azul. Em outras palavras, o valor de vorticidade mínima assumirá a cor vermelha, de vorticidade média a cor verde e de máxima vorticidade a cor azul. Entenda-se mínimo e máximo, não em seus valores absolutos, mas sim em seus valores numéricos, ou seja, levando em consideração que há valores positivos e negativos.

Essa escala é conhecida como RGB (red, green, blue) onde a cor é dada através da mistura destas três cores. A ponderação desta mistura pode ser acompanhada na Figura 4.2.

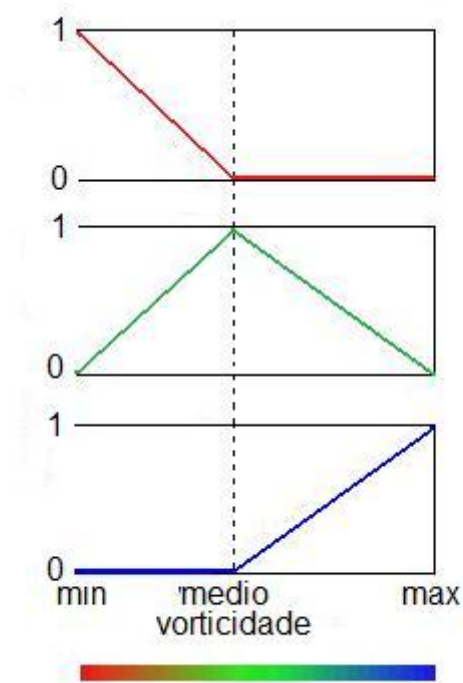


Figura 4.2 Escala de cores RGB

- Definição de Caso Exemplo

Para validar a funcionalidade do visualizador desenvolvido, tomou-se uma simulação real, ou seja, um arquivo obtido pelo Anflex . Para se ter idéia, este arquivo txt possui 125 MB, aproximadamente 110 instantes de tempo com informações de até 20000.vórtices/instante.

Particularmente neste caso, escolheu-se um arquivo com apenas uma seção, pois permite obter uma vista superior do fenômeno com mais clareza. É possível realizar uma simulação com mais de um plano no espaço.

Os resultados da simulação são apresentados a seguir.



Figura 4.3 Detalhamento

É possível fazer um comparativo entre a Figura 4.3 e Figura 2.3, observando a proximidade entre a imagem obtida e o extraído na literatura.

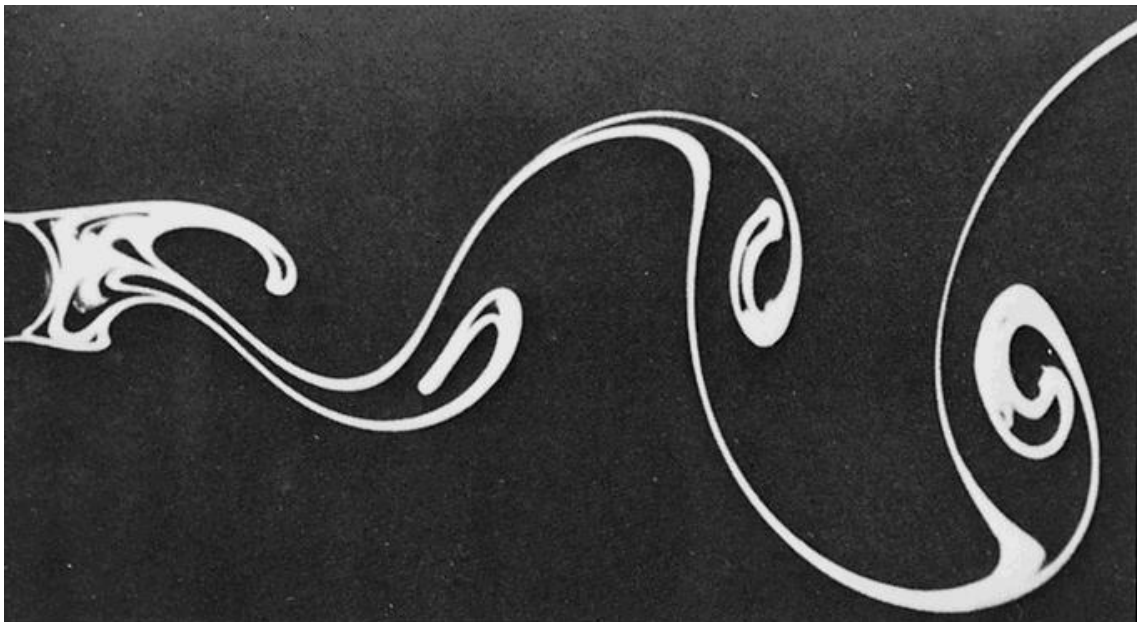


Figura 2.3 Formação dos vórtices $Re=140$ — Reproduzido de [3] POTTER, WIGGERT.

5 Resultados

Como nas outras áreas da mecânica dos fluidos, as técnicas teóricas, analíticas e numéricas, podem fornecer muitas informações sobre este fenômeno. Entretanto a quantidade de informações obtidas com métodos puramente teóricos é limitada devido a complexidade das equações que descrevem os escoamentos e da geometria dos objetos envolvidos.

Foram obtidos resultados encontrados na literatura, extraído de YAMAMOTO [7], para escoamentos em cilindros circulares com número de $Re = 10000$. São apresentados valores de coeficiente de arrasto médio em ensaios experimentais e simulações numéricas bidimensionais e tridimensionais.

Fonte	Cd
MVD Lagrangeano bidimensional (2D) - 2002	1,28
Flatschart, R. B. (2D) - 2000	1,55
Saltara, F (2D) - 1999	1,73
Selvan R.P. (2D) - 1997	1,34
Nomura T. (2D) - 1994	1,35
Tamura, T (3D) – 1990	1,20
Roshko, A (experimental) - 1961	1,20

5.1 Coeficiente de Arrasto

Feita a simulação com os seguintes parâmetros:

- Modelo Estático;
- $Re=10.000$;
- Fluido água;
- Um único riser com diâmetro 0,1m;
- Seção do riser dividida em 128 painéis;
- Time-step de 0,005s;
- Total de time-step = 10.000;

Chegou-se a um coeficiente de sustentação médio igual a

$$C_d = 1,351$$

A figura 5.3 apresenta a evolução do coeficiente de sustentação ao longo do tempo

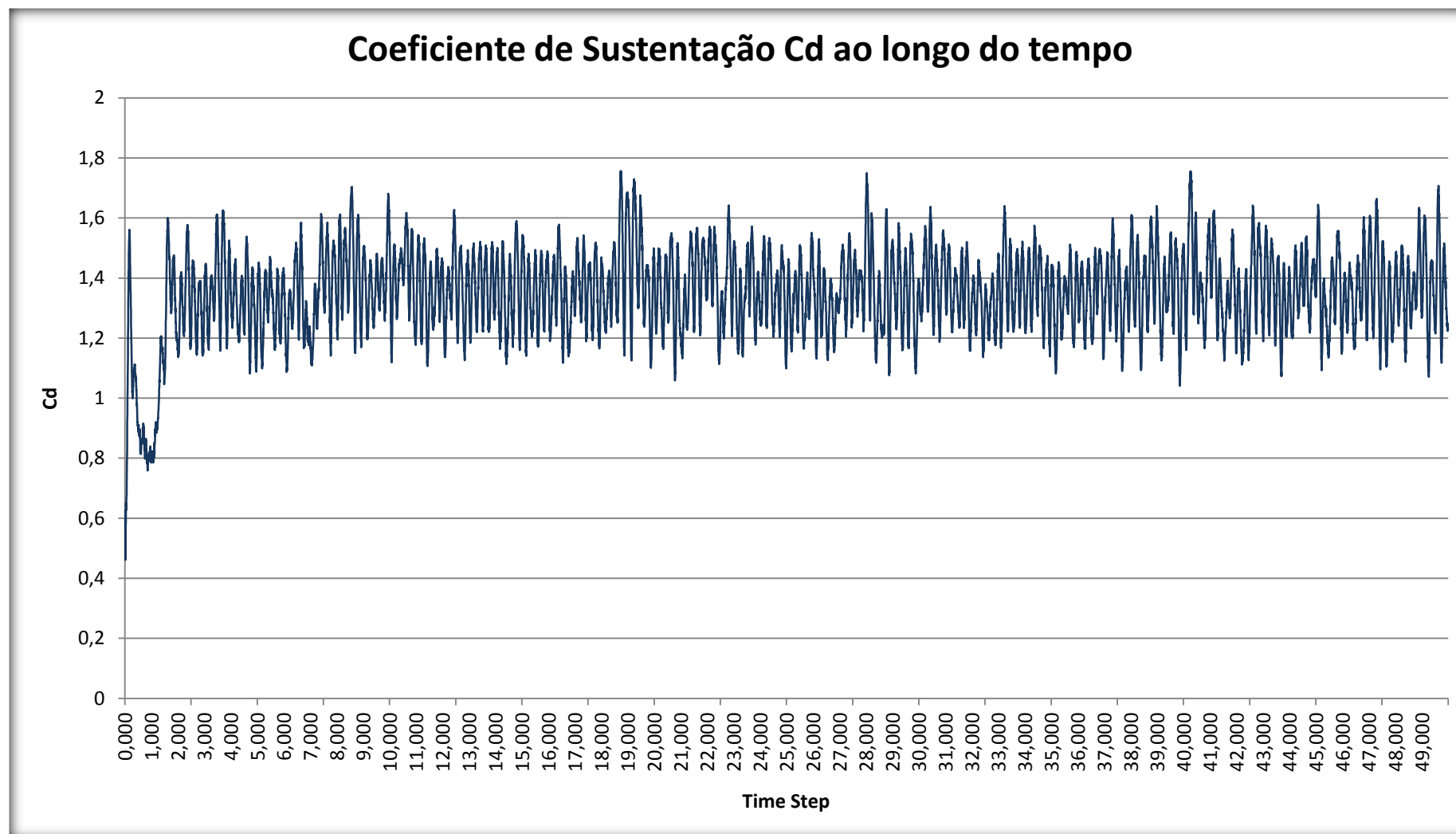


Figura 5.1 Coeficiente de Sustentação ao longo do tempo

5.2 Visualização

A seguir apresenta-se uma série de imagens, apresentando a evolução do escoamento de acordo com os resultados obtidos a partir do Anflex-CFD.

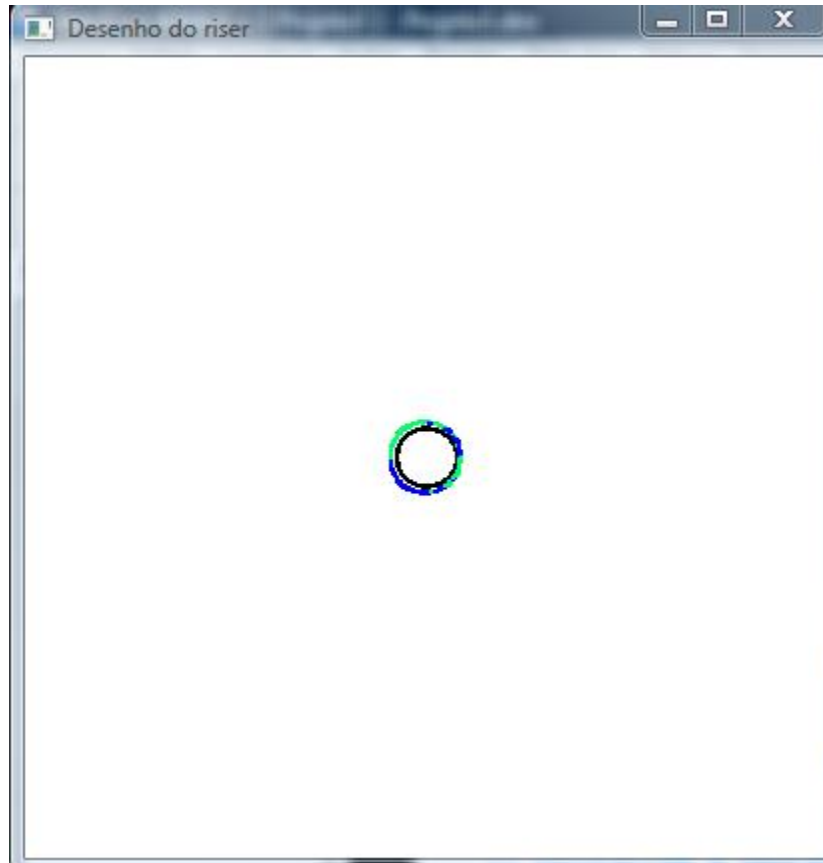


Figura 5.2 Início da simulação

As Figuras 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5 mostram o início da simulação numérica e pode-se observar o início do desprendimento dos vórtices próximos à fronteira com o riser.

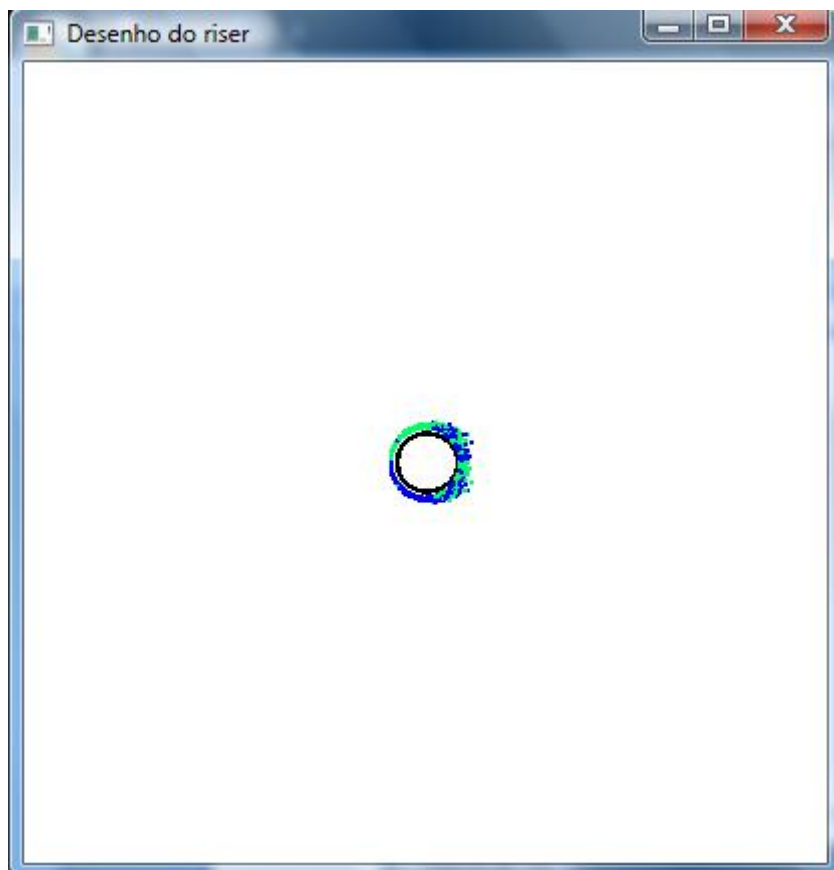


Figura 5.3 Terceiro passo no tempo

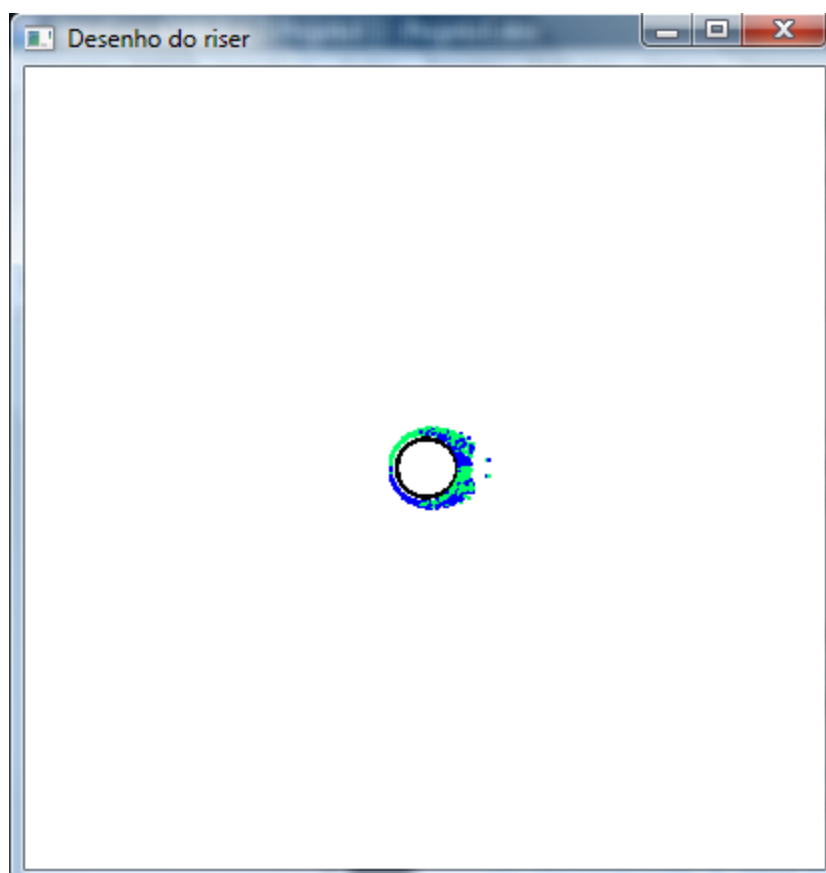


Figura 5.4 Quinto passo no tempo

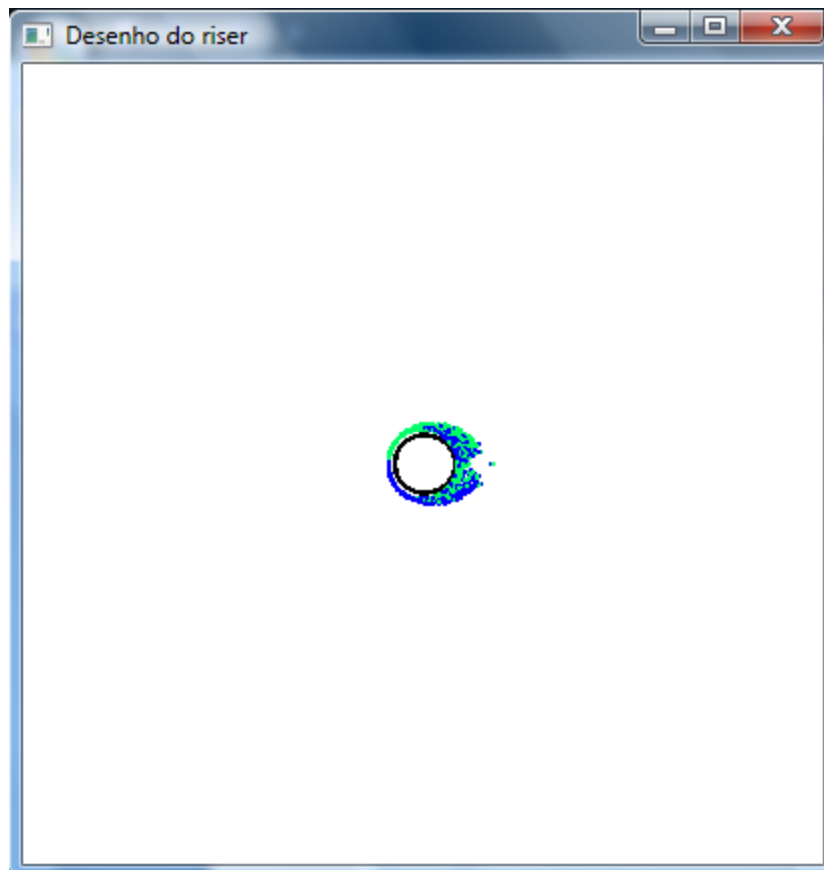


Figura 5.5 Sexto passo no tempo

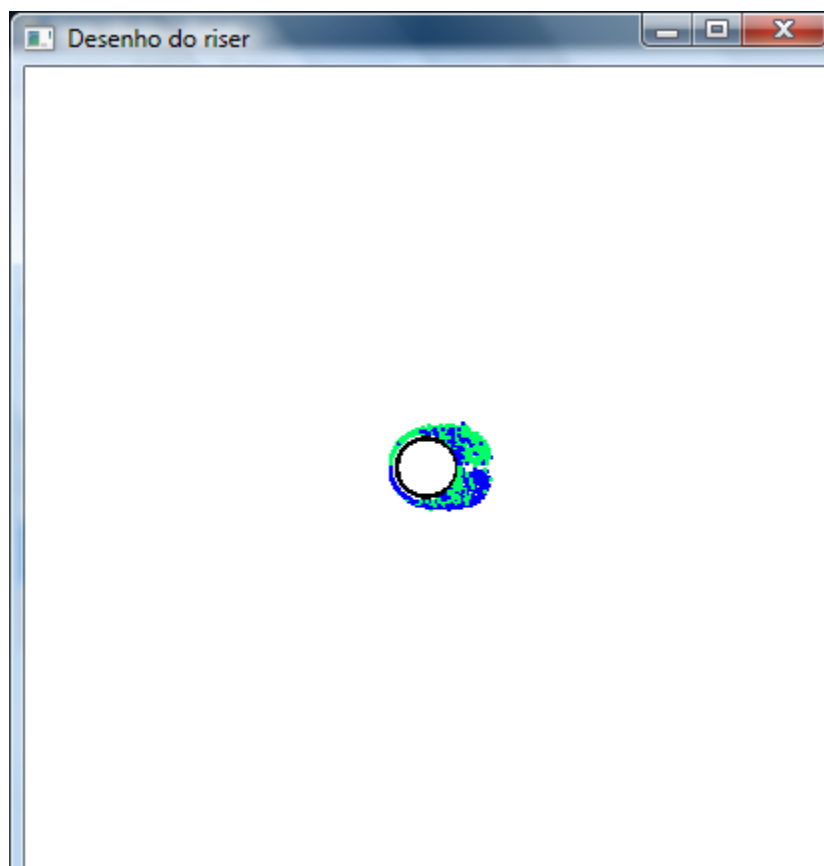


Figura 5.6 Décimo passo no tempo

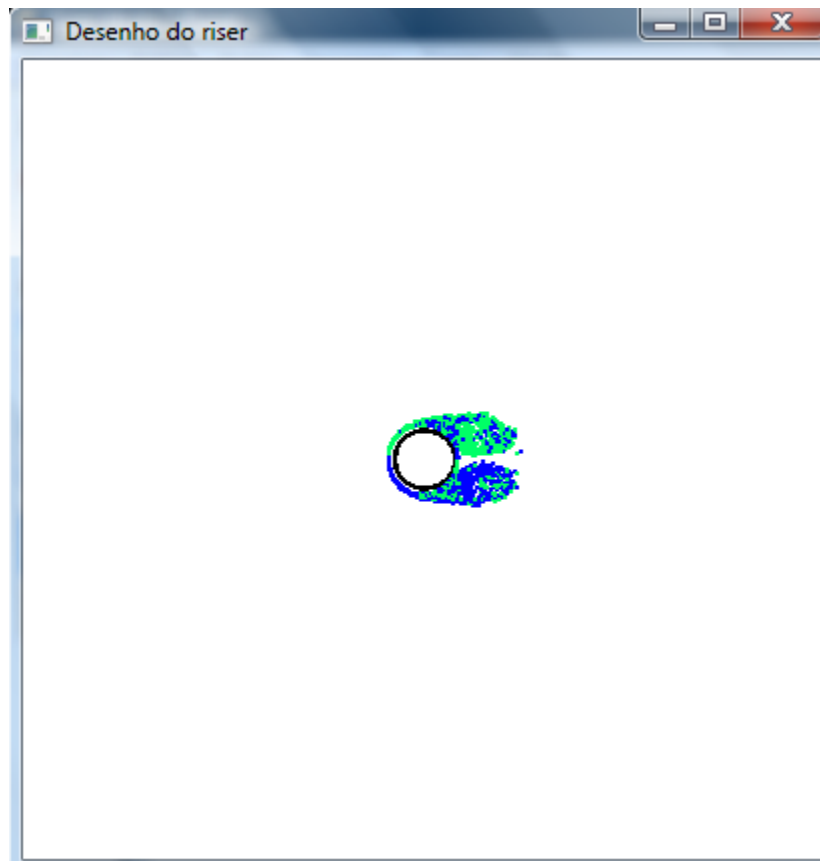


Figura 5.7 Décimo quinto passo no tempo

A partir da Figura 5.6 observa-se o início da formação das bolhas de separação, que se formam de forma simétrica à jusante do riser. Esse desenvolvimento pode ser visto até a Figura 5.10

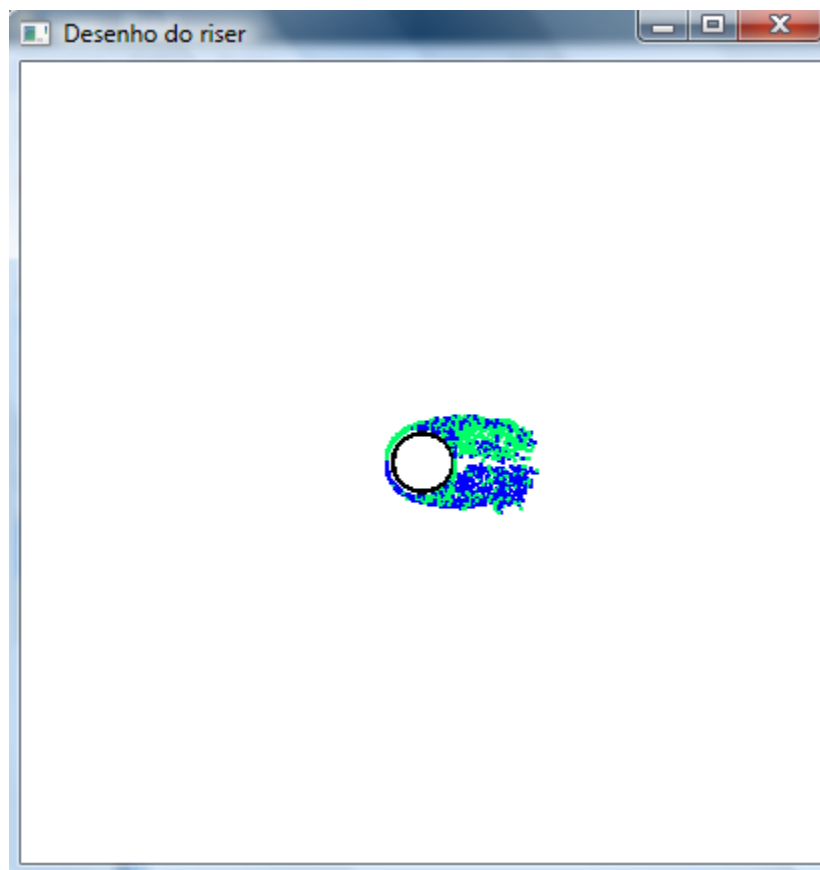


Figura 5.8 Vigésimo passo no tempo

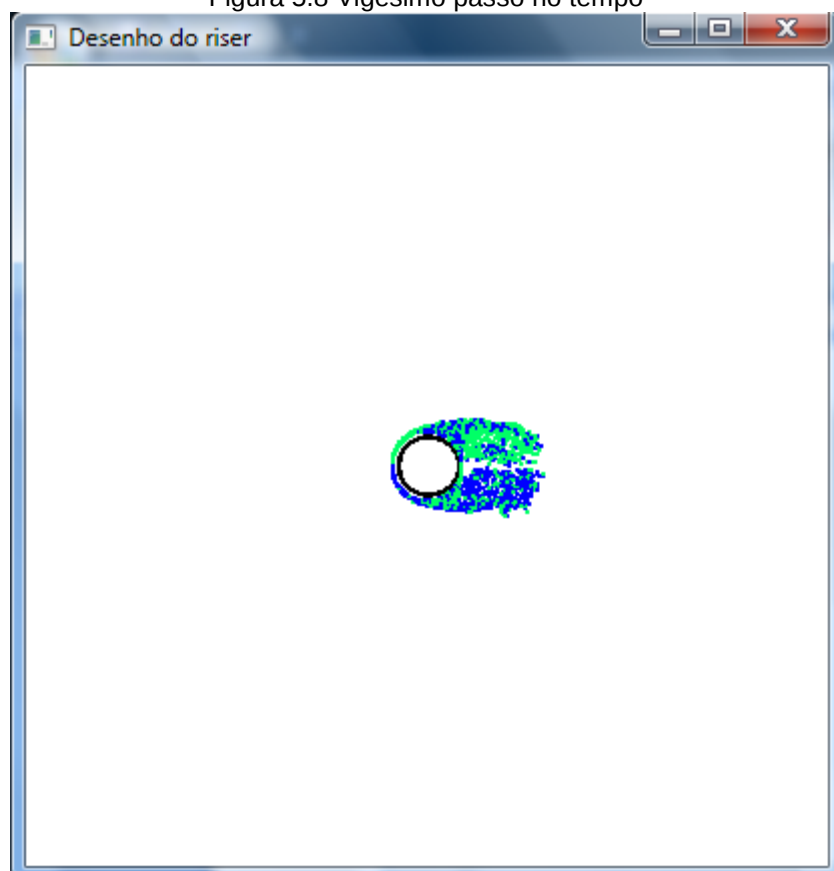


Figura 5.9 Trigésimo passo no tempo



Figura 5.10 Trigésimo Quinto passo no tempo

Na Figura 5.11 , observa-se que os vórtices começam a interagir entre si. Isso vai ocorrendo durante alguns passos no tempo, como observa-se até a Figura 5.16

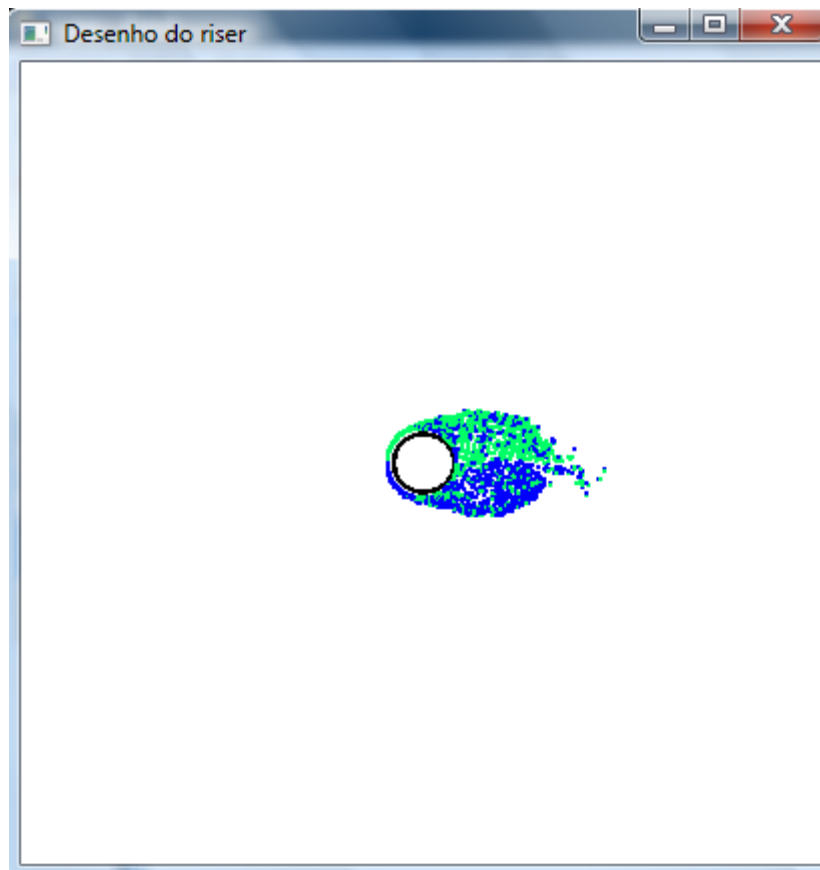


Figura 5.11 Quadragésimo passo no tempo

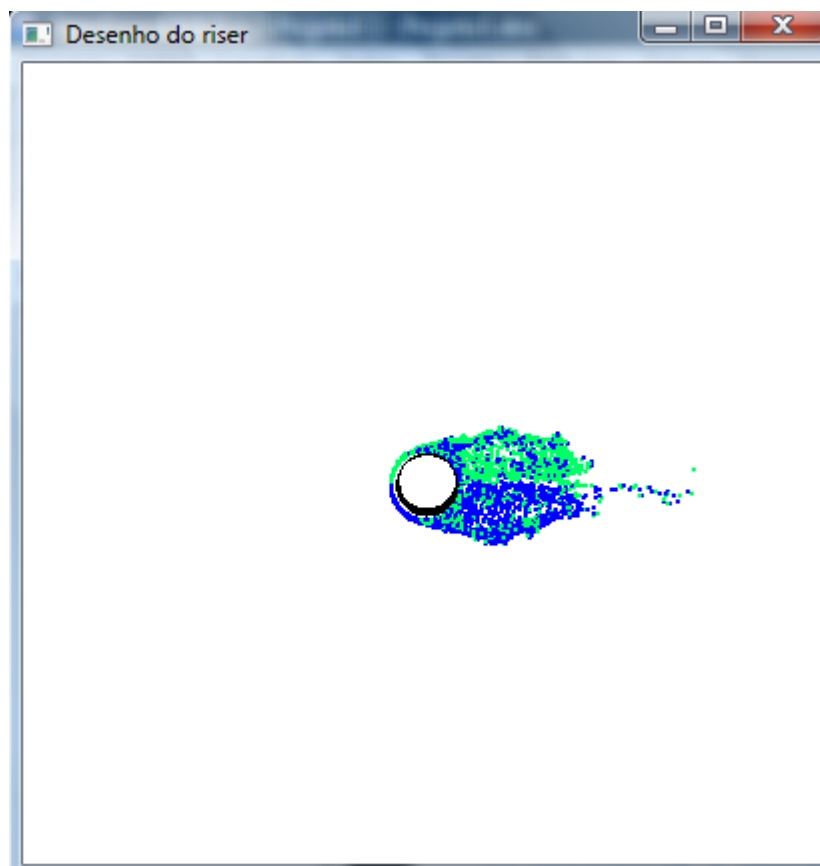


Figura 5.12 Quinquagésimo passo no tempo

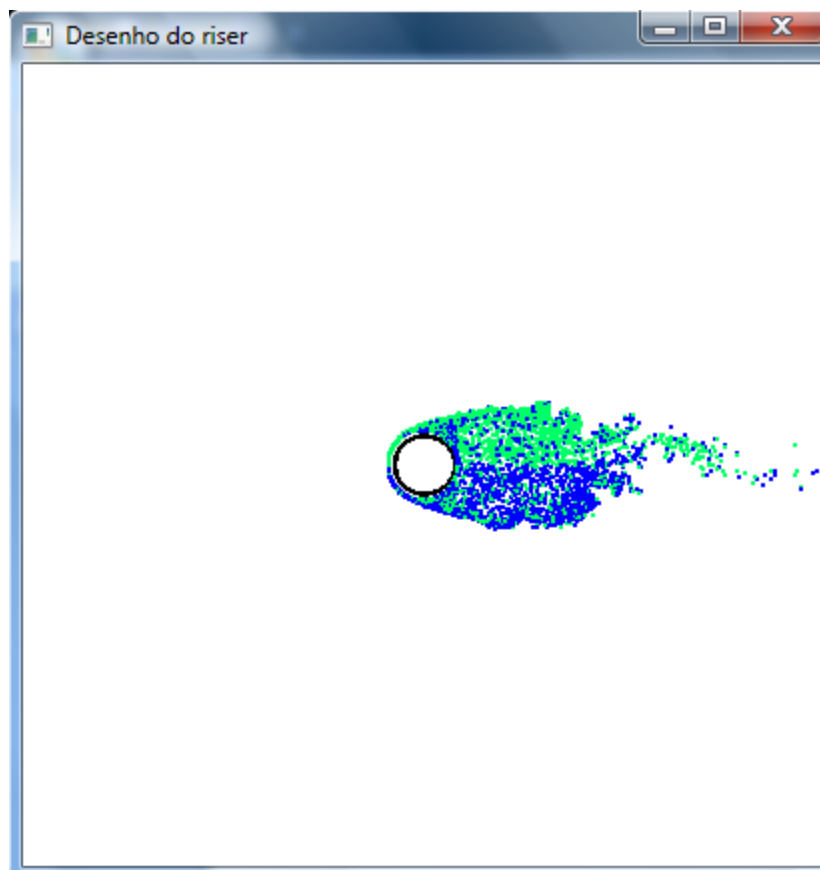


Figura 5.13 Sexagésimo passo no tempo

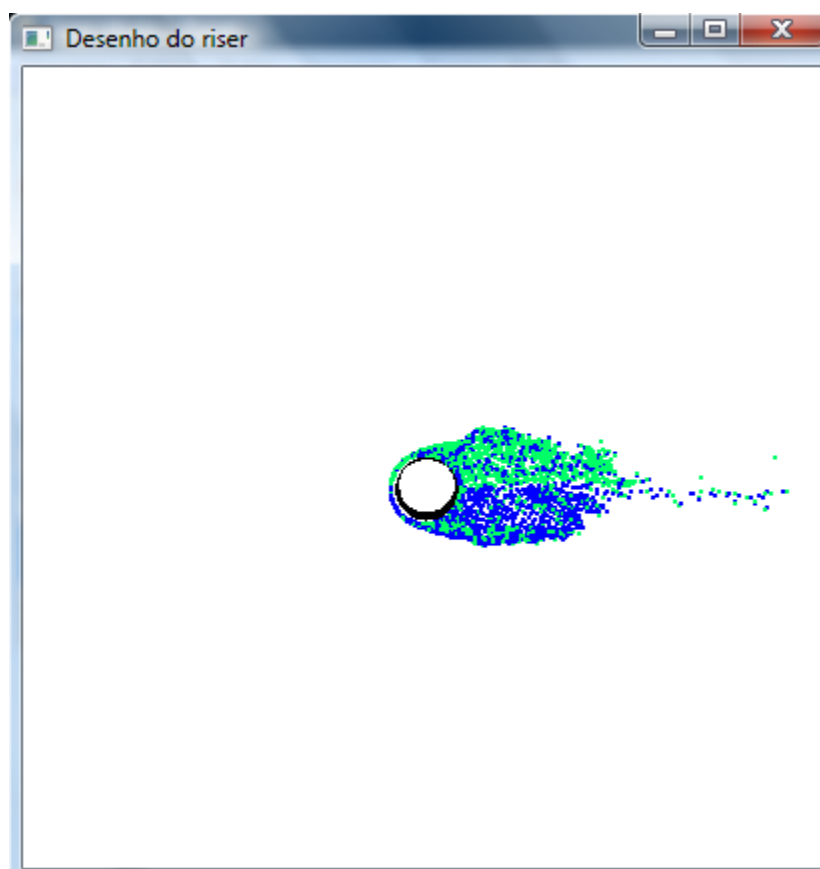


Figura 5.14 Septuagésimo passo no tempo

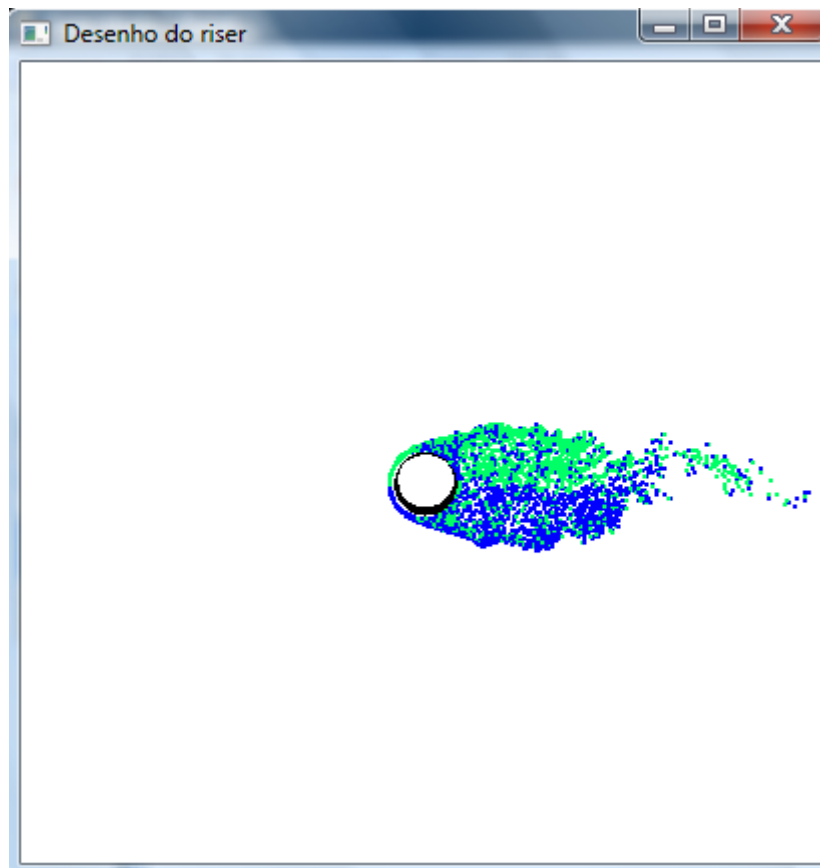


Figura 5.15 Octogésimo passo no tempo

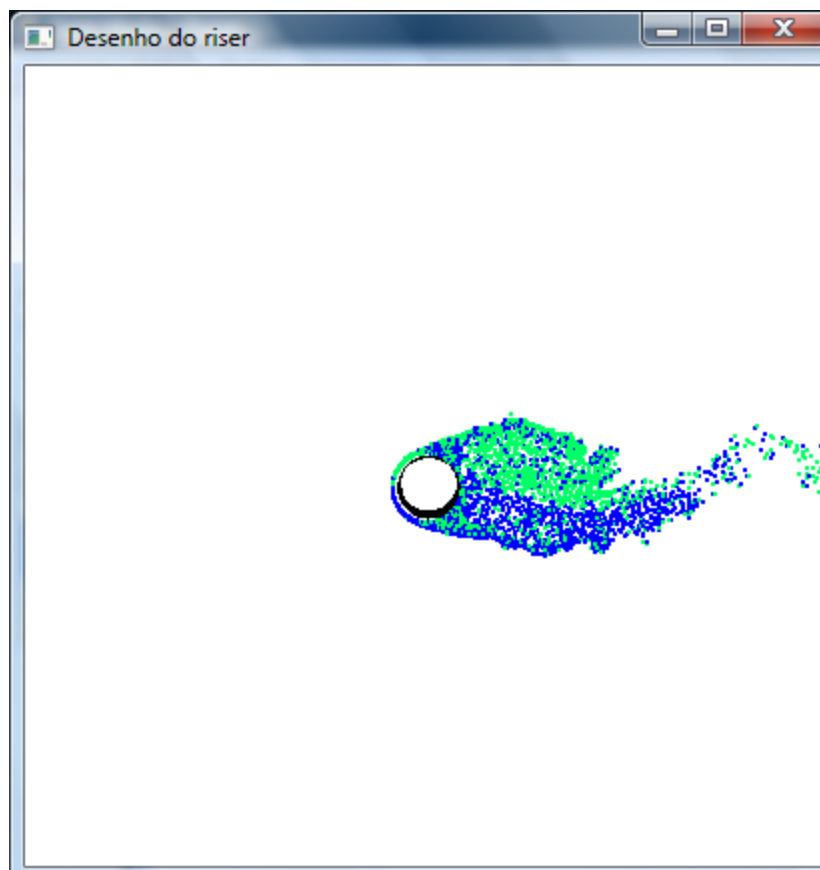


Figura 5.16 Nonagésimo passo no tempo

Na Figura 5.17, observa-se o início do desprendimento do primeiro vórtice superior.

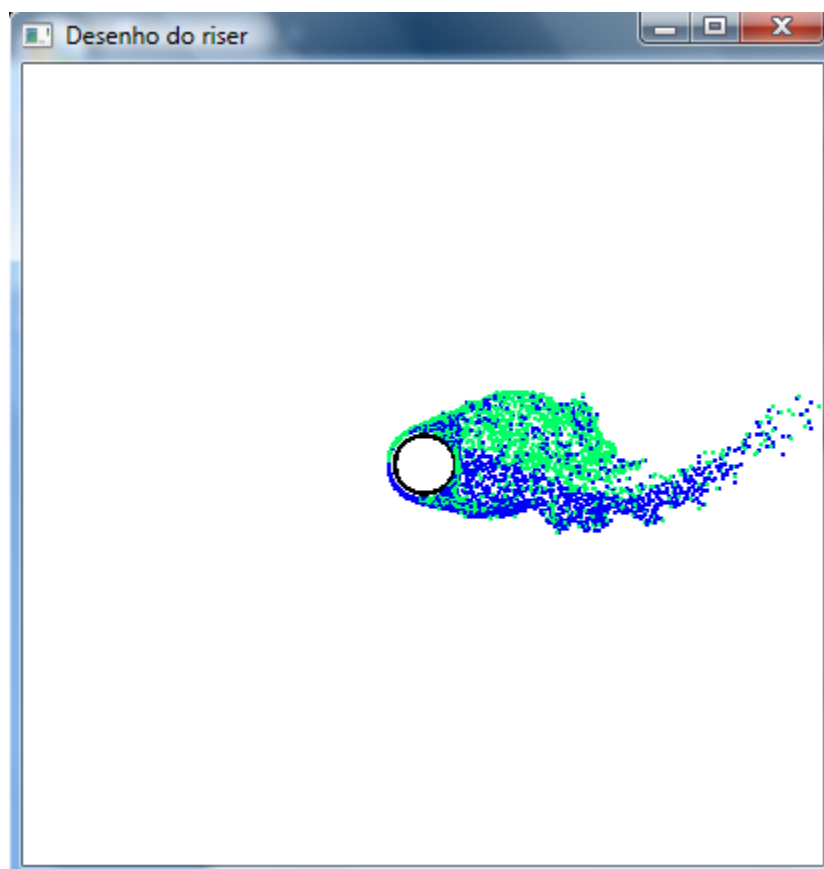


Figura 5.17 Centésimo passo no tempo

Na Figura 5.18, observa-se o desprendimento deste vórtice e os preparativos para o desprendimento do primeiro vórtice inferior.

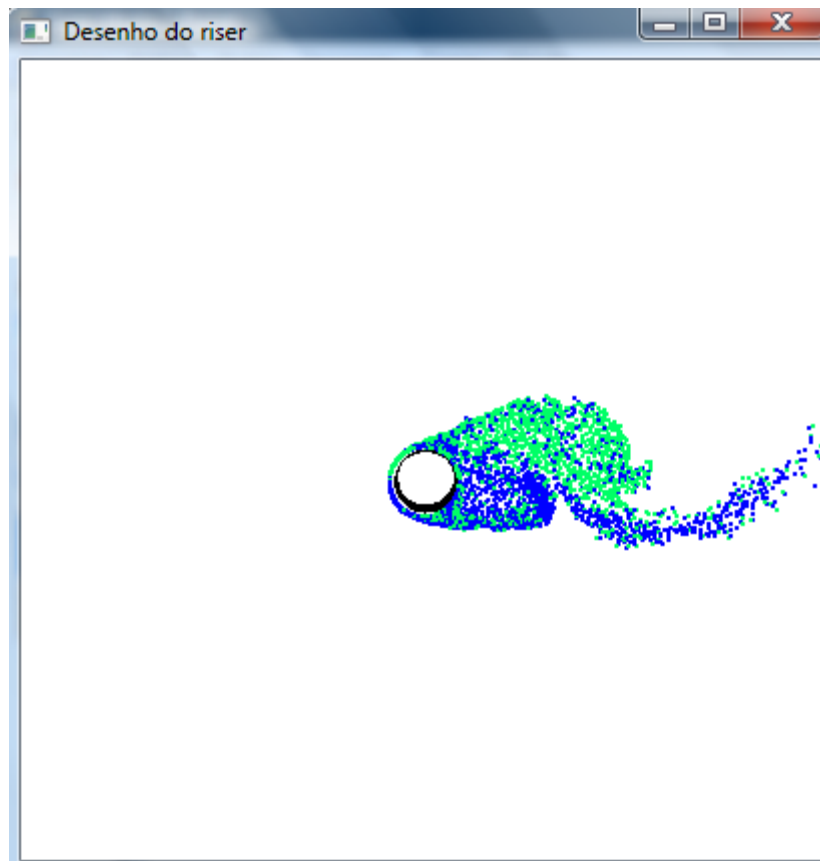


Figura 5.18 Início do desprendimento do vórtice superior

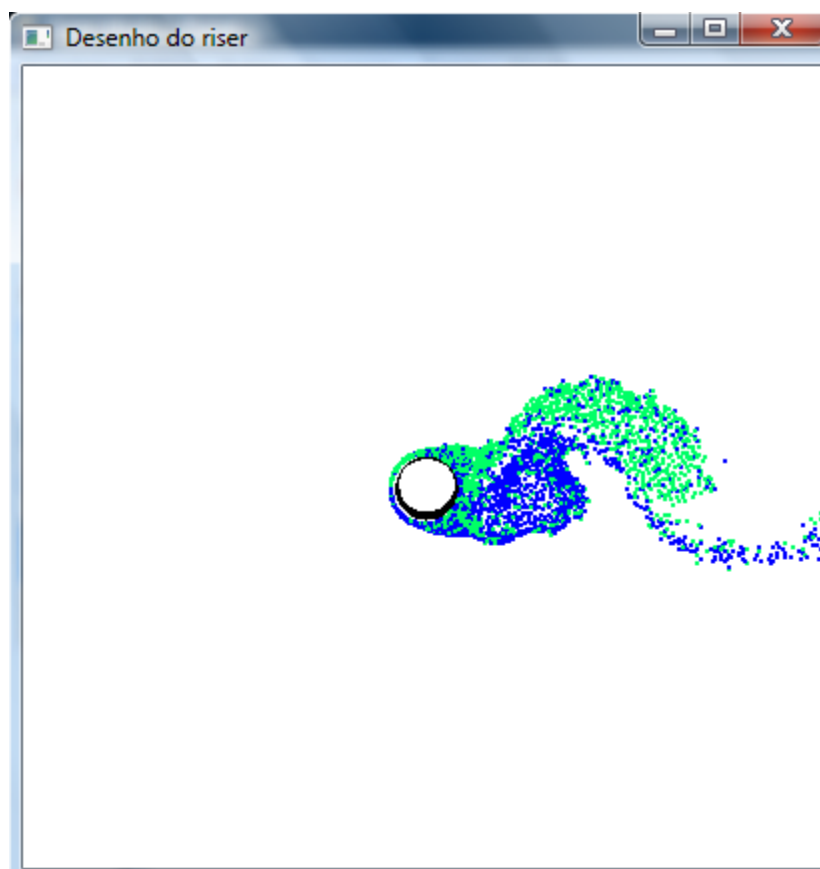


Figura 5.19 Desprendimento do vórtice superior

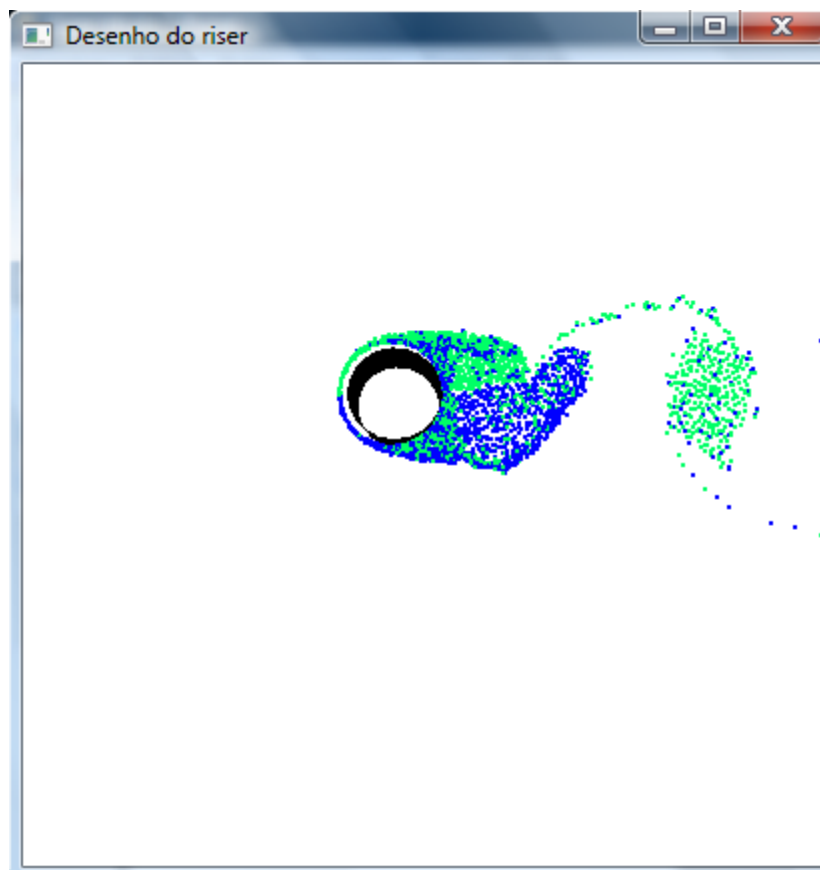


Figura 5.20 Início do desprendimento do vórtice inferior

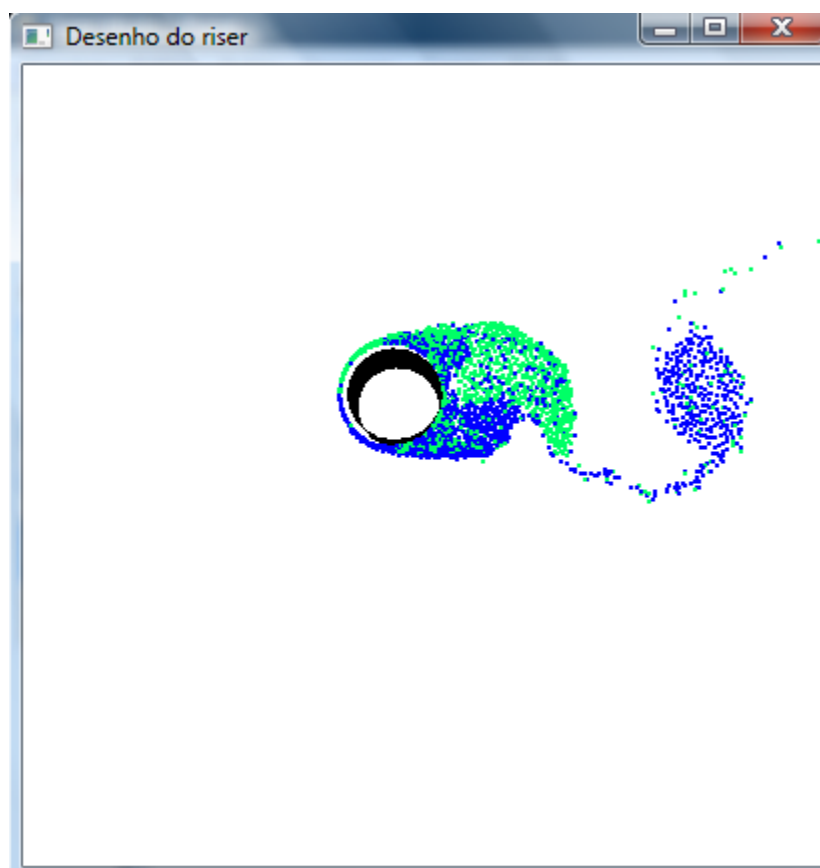


Figura 5.21 Início do desprendimento do 2º vórtice superior

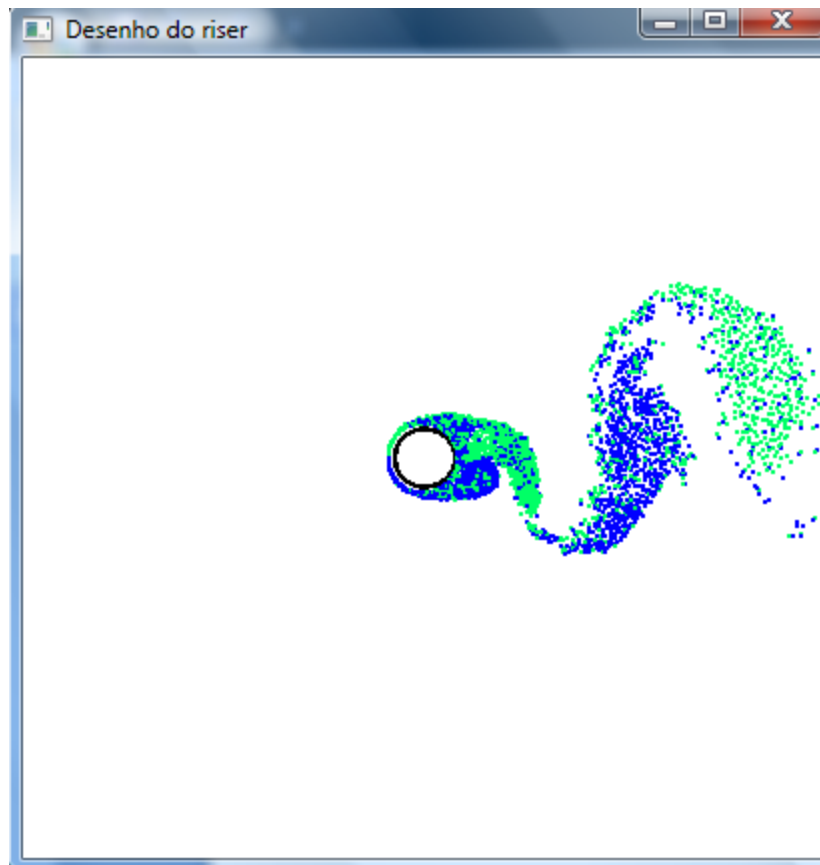


Figura 5.22 Início do regime dos desprendimentos de vórtices

A partir da Figura 5.22, observa-se o início do regime de desprendimento alternado de vórtices

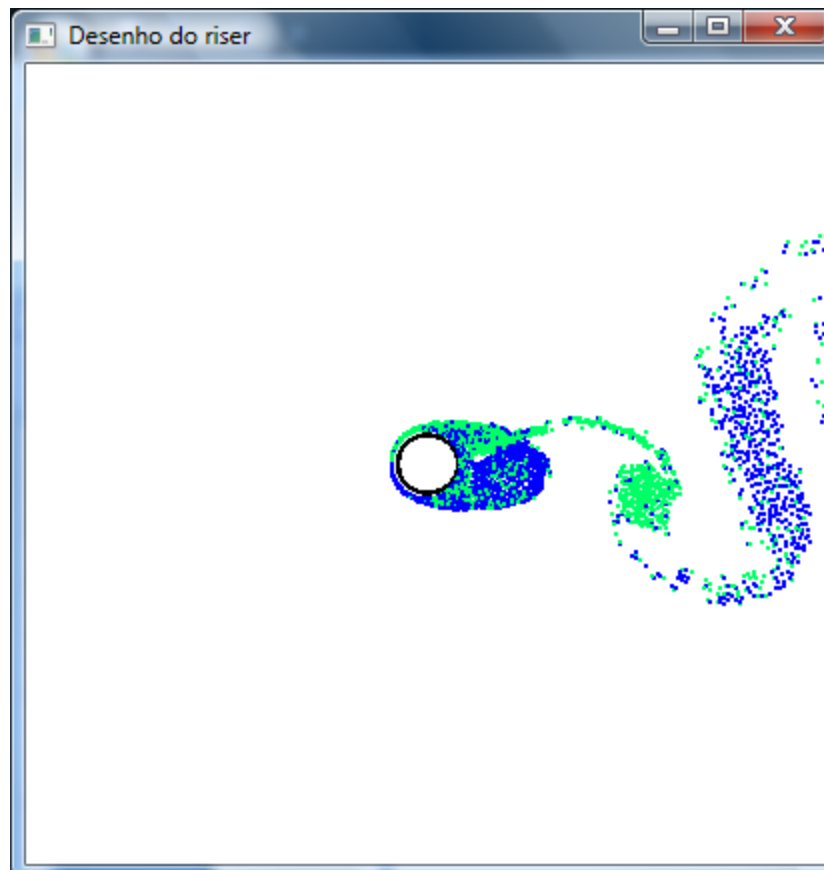


Figura 5.23 Regime dos desprendimentos de vórtices

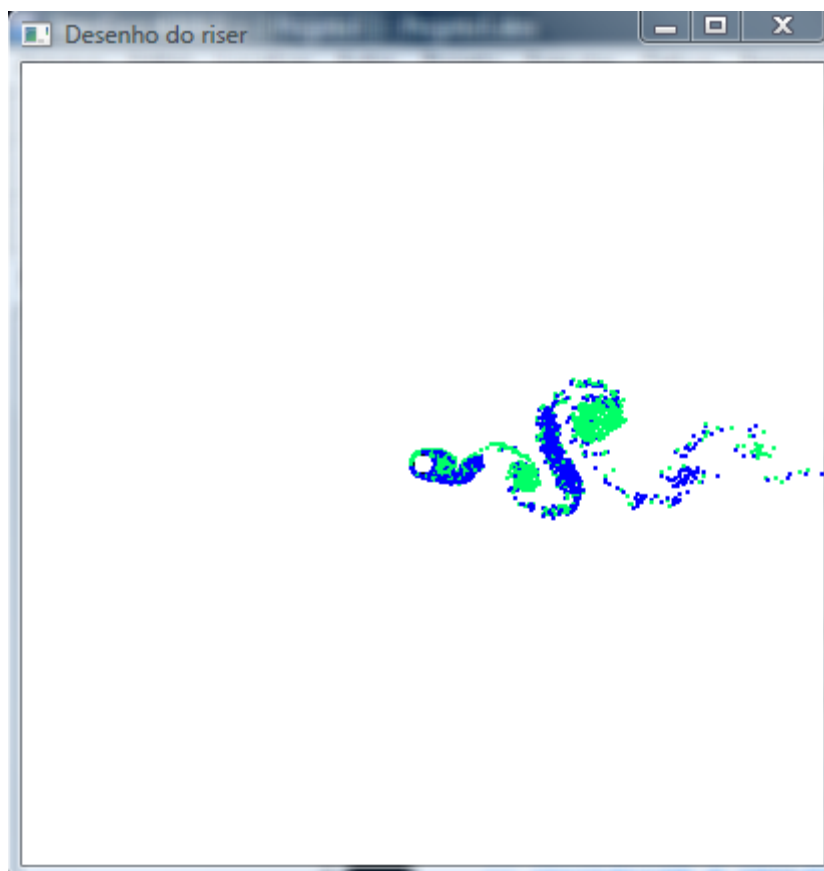


Figura 5.24 Regime dos desprendimentos de vórtices vista afastada

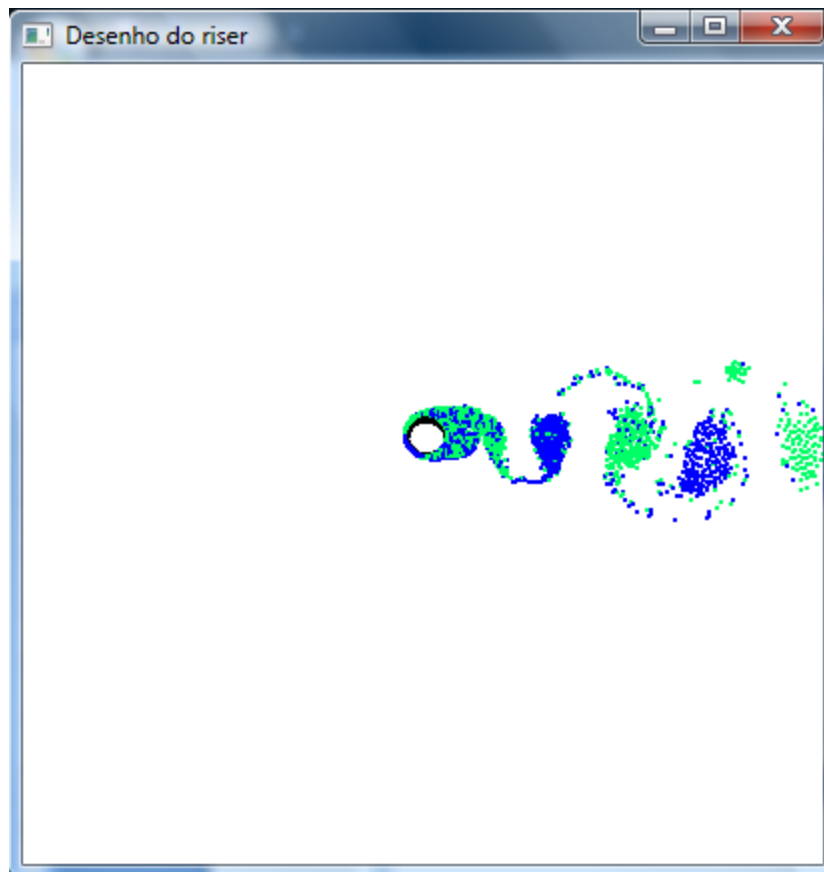


Figura 5.25 Regime dos desprendimentos de vórtices

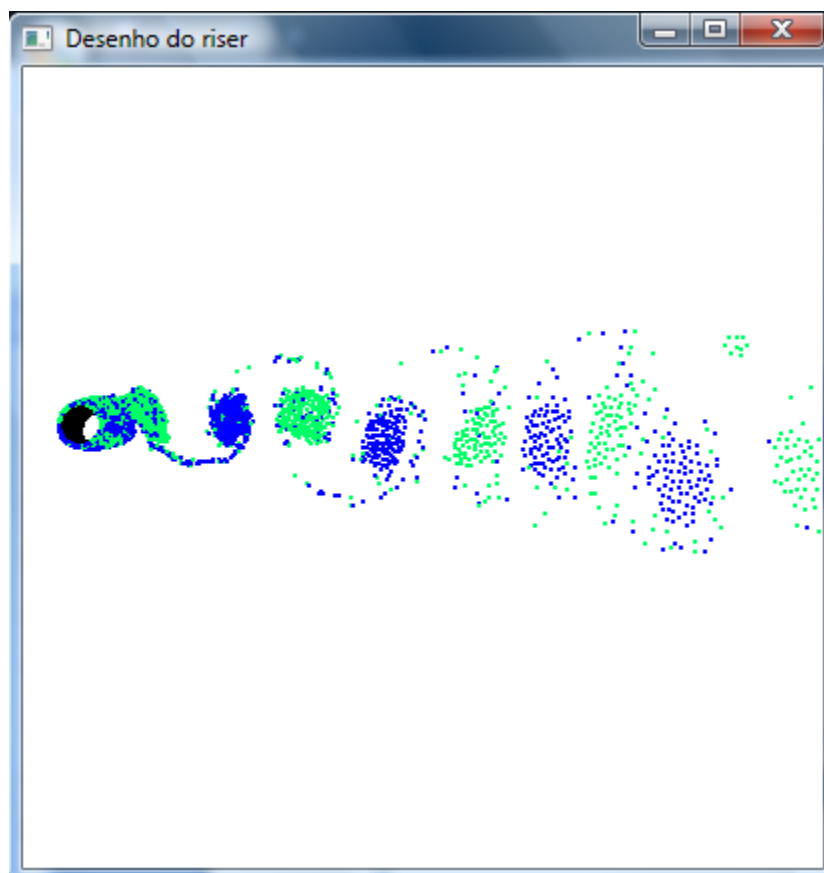


Figura 5.26 Regime dos desprendimentos de vórtices com vista deslocada à direita

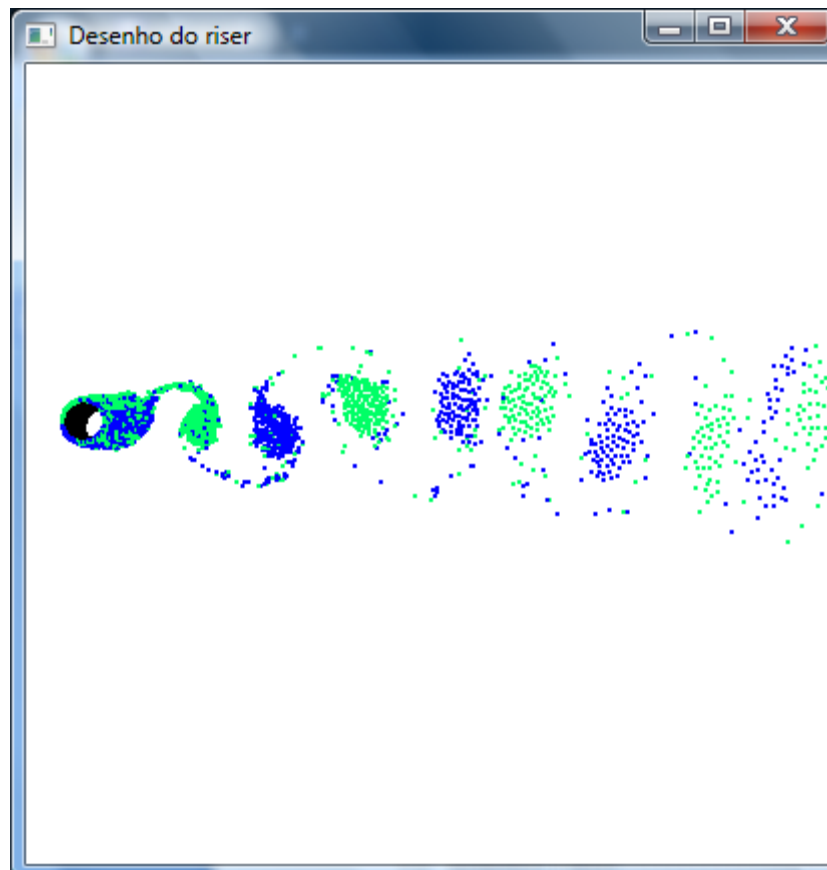


Figura 5.27 Regime dos desprendimentos de vórtices com vista ligeiramente angulada

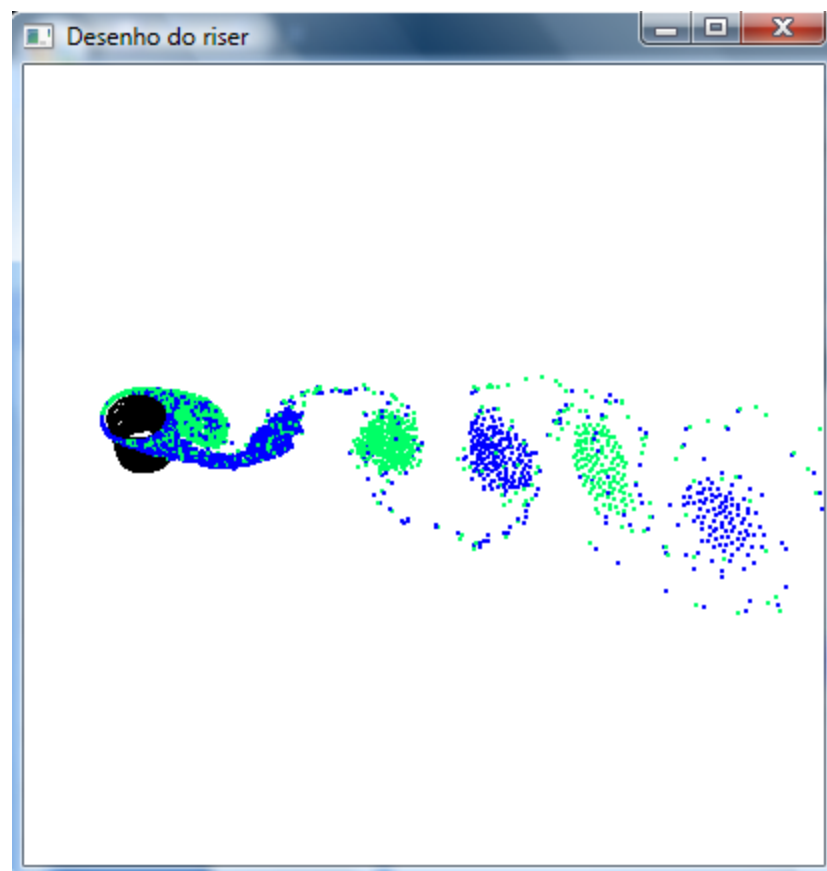


Figura 5.28 Regime dos desprendimentos de vórtices com vista bem angulada

A partir da Figura 5.23 até a Figura 5.28, observa-se o desprendimento de vórtices por outros ângulos e aproximações, demonstrando a funcionalidade do visualizador, que fornece estas ferramentas.

Daqui em diante serão apresentados os contornos de vorticidade. A Figura 5.29 mostra o início do desprendimento de vórtices, onde vemos duas regiões bem definidas (azul e vermelho), caracterizando as regiões de alta vorticidade (positivas e negativas).

Nas Figuras 5.30 e 5.31, tem-se esta mesma concepção, mas já com as bolhas de separação em formação.

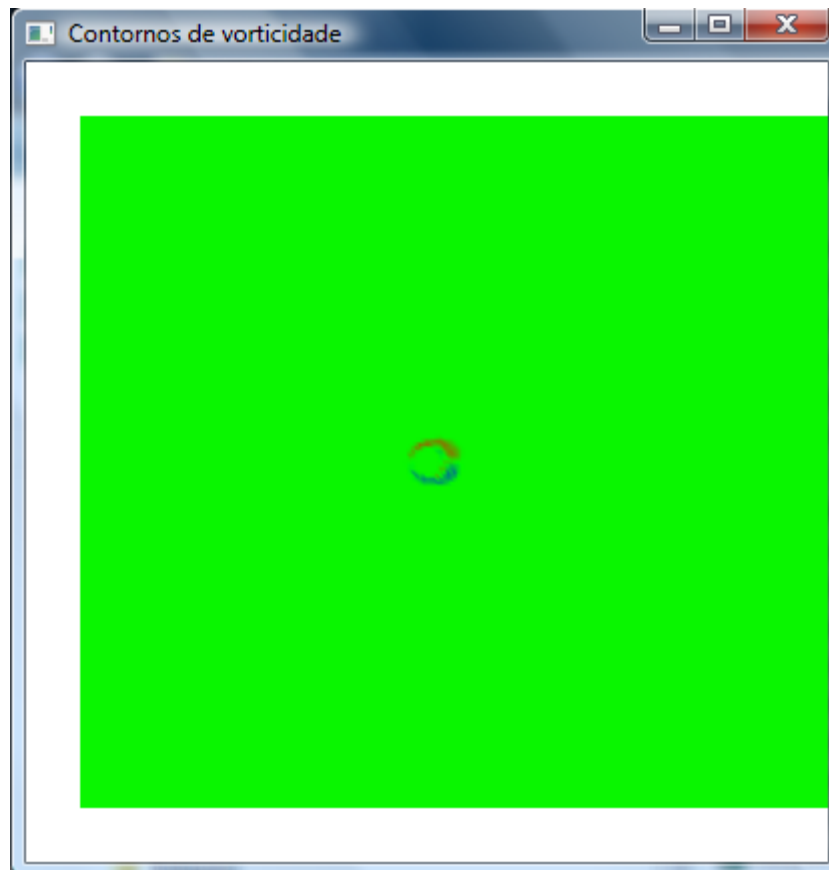


Figura 0.19 Início do desprendimento de vórtices

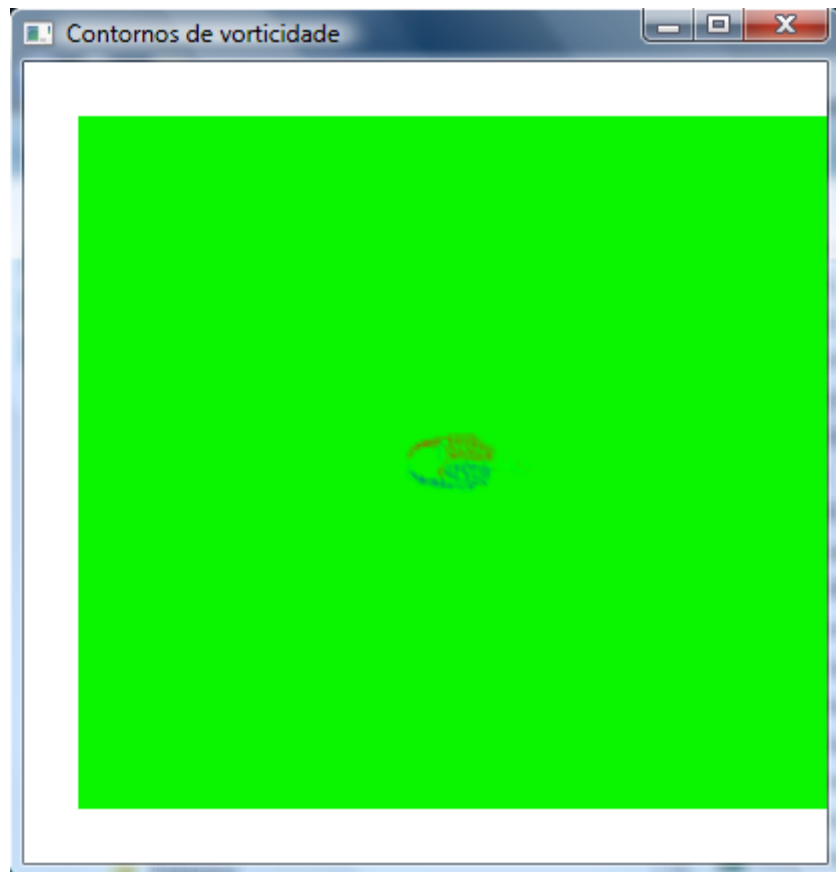


Figura 0.302 Formação das duas bolhas de separação simétricas

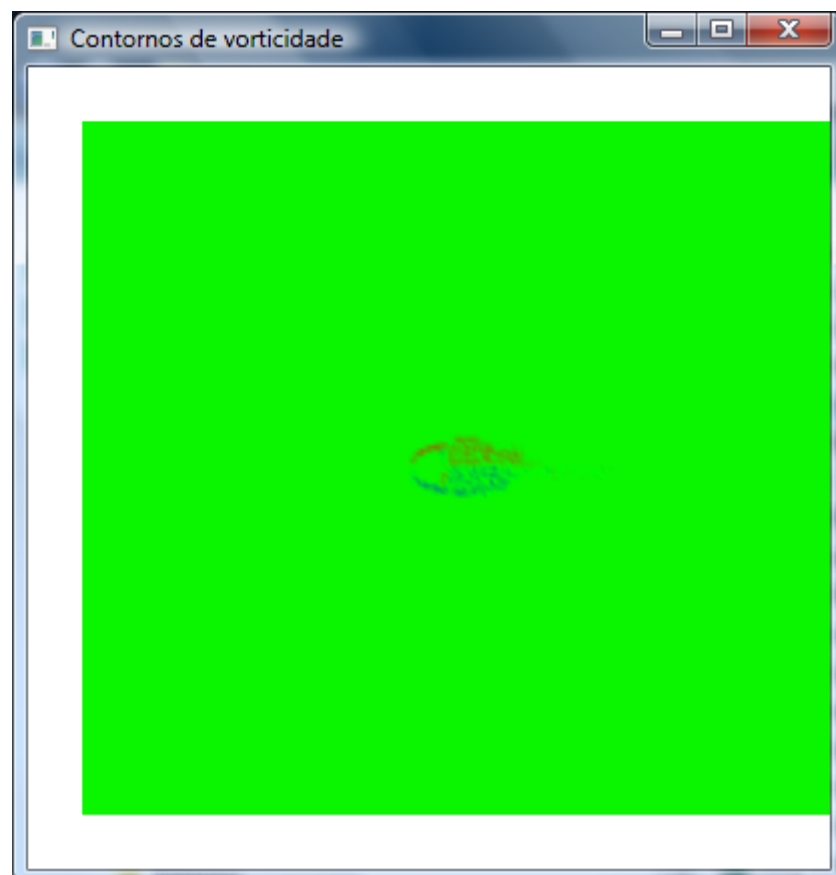


Figura 0.313 Quadragésimo passo no tempo



Figura 0.324 Qüinquagésimo passo no tempo

A partir da Figura 5.33, observa-se os contornos de vorticidade no momento em que o primeiro vórtice é desprendido.

Em seguida, nas figuras seguintes, pode-se observar o início do regime de desprendimento de vórtices.



Figura 0.335 Contorno de vorticidade do primeiro vórtice superior a ser desprendido



Figura 0.346 Contorno de vorticidade do primeiro vórtice inferior a ser desprendido



Figura 0.357 Contorno de vorticidade do início do regime de desprendimento de vórtices

Já a partir da Figura 5.36 observam-se os contornos de vorticidade de outras formas, por outros ângulos, e mostrando, novamente, os atributos do visualizador.

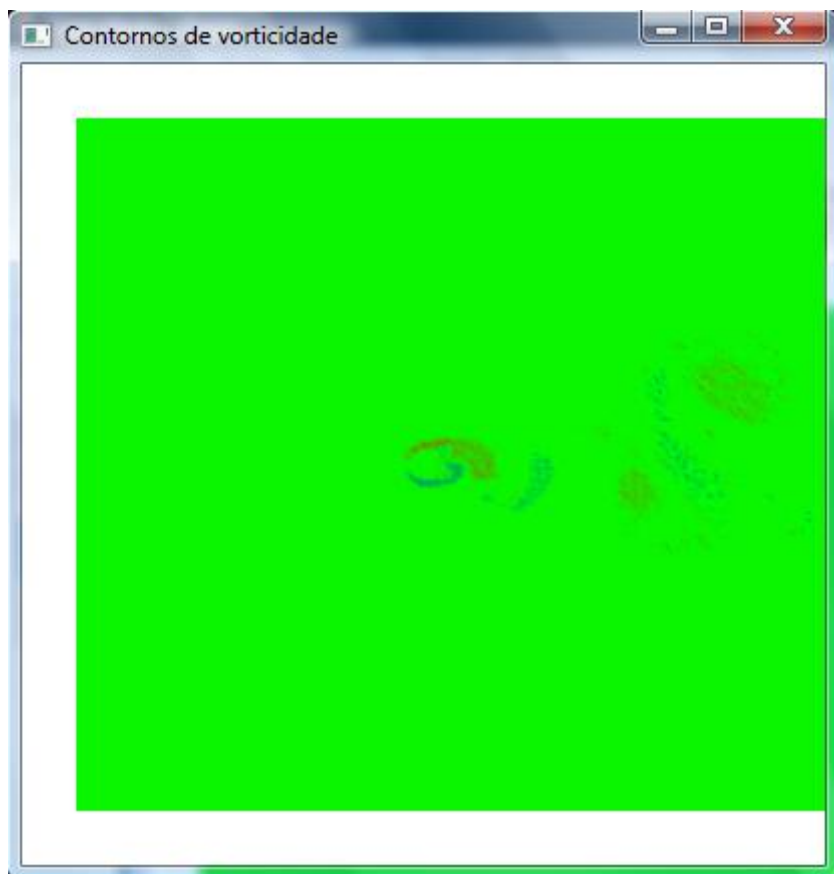


Figura 0.368 Contorno de vorticidade durante o regime

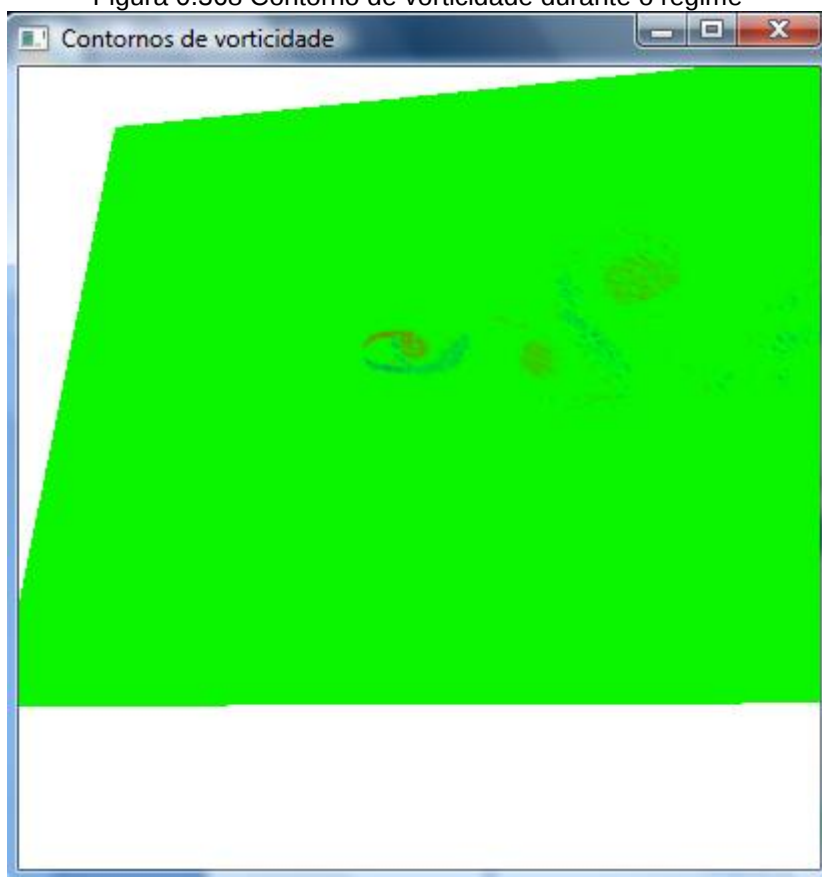


Figura 0.379 Contornos de vorticidade com por outro ângulo



Figura 0.3810 Contornos de vorticidade de forma aproximada

6 Conclusão

No presente trabalho, foi apresentado todo o conteúdo de estudo que sustentou o seu desenvolvimento, bem como, o resultado da simulação numérica para o escoamento ao redor do riser com $Re=10.000$. O resultado apresentado mostra boa concordância com resultados obtidos por outros pesquisadores, tanto experimentalmente como numericamente.

A ferramenta de visualização de vórtices e de vorticidade mostrou-se bastante útil, uma vez que, torna possível a interpretação visual do fenômeno.

Foi de grande valia o estudo do fenômeno de VIV, uma vez que, ele está diretamente ligado a uma atividade de grande relevância no contexto econômico brasileiro, que é a exploração de petróleo em altas profundidades.

Apêndice A

Equação diferencial da continuidade

Considerando o fluxo de massa através de cada face do volume de controle fixo infinitesimal mostrado na Figura A.1. Fixamos o fluxo de massa líquido que entra no elemento igual à taxa de variação da massa do elemento, ou seja,

$$m_{\text{ent}} - m_{\text{saída}} = \frac{\partial}{\partial t} m = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) \quad (\text{A.1})$$

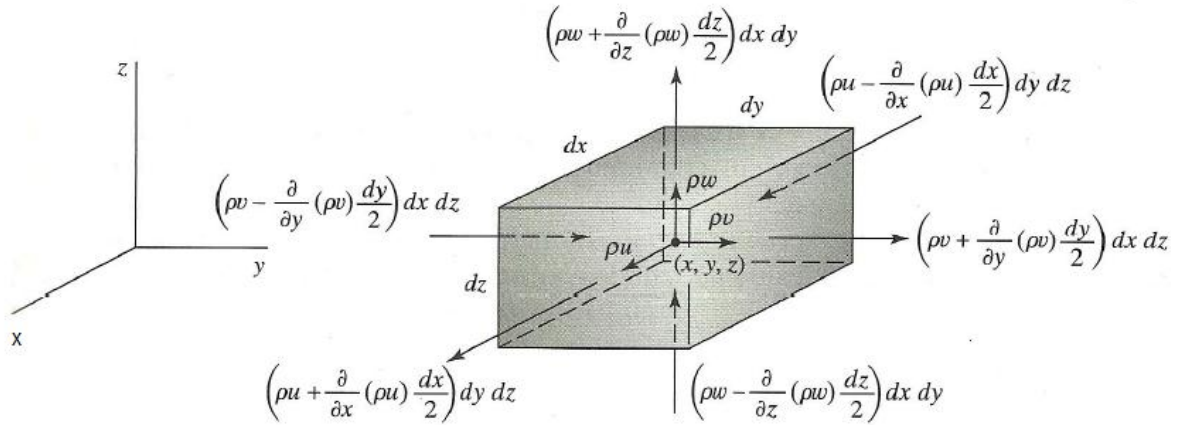


Figura A.1 Volume de controle infinitesimal que usa coordenadas retangulares.

Observando o fluxo de massa através de cada uma das seis faces, da figura A.1, a equação A.1 toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] dy dz + \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz - \\ & \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dz + \left[\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy - \left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{dz}{2} \right] dx dy = \\ & \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Fazendo as substituições apresentadas na figura , subtraindo os termos apropriados e dividindo por $dx dy dz$, chega-se à:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Ou em termos da derivada substancial

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Para um escoamento compressível

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Ou na forma vetorial

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (\text{A.6})$$

Equação diferencial da quantidade de movimento

Para obter a equação diferencial da quantidade de movimento, considere as forças que agem numa partícula infinitesimal do fluido, mostrada na Figura A.2. Supõem-se que as componentes sejam funções de x , y , z e t e, portanto, os valores das componentes da tensão mudam de face para face.

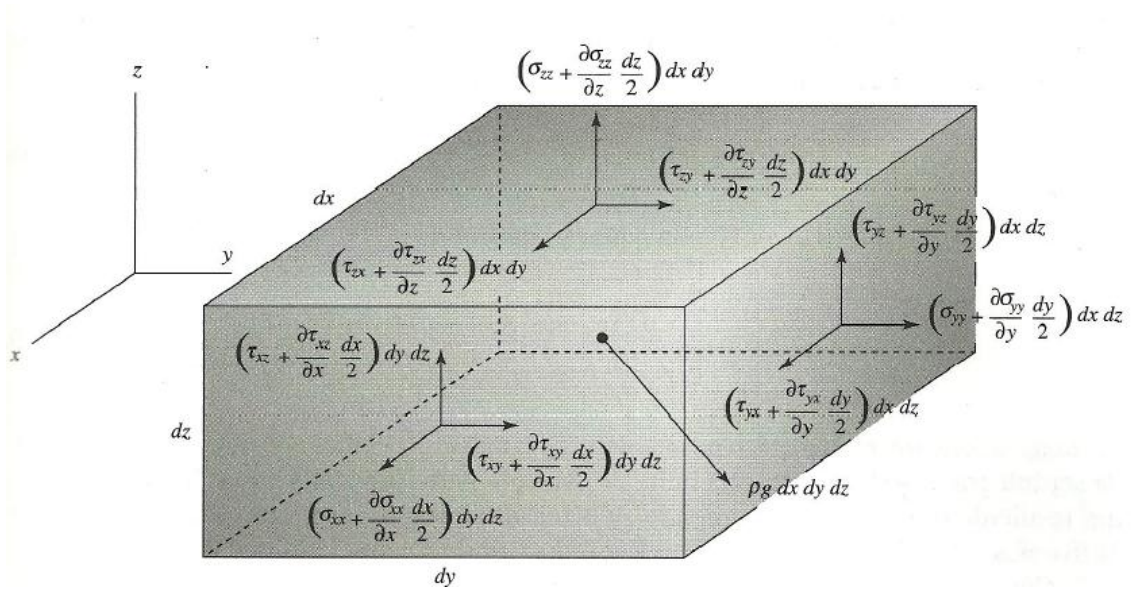


Figura A.2 Forças agindo sobre uma partícula infinitesimal do fluido

Aplicando a Segunda Lei de Newton nas direções x,

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy - \\ & \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdz - \\ & \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy + \rho g_x dxdydz = \rho dxdydz \frac{Du}{Dt} \end{aligned} \quad (A.7)$$

Depois de dividir A.7 pelo volume $dxdydz$, A.7 simplifica para

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x \quad (A.8)$$

Similarmente, para as direções y e z, tem-se:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y \quad (A.9)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\sigma_{zz}}{\partial z} + \rho g_z \quad (A.10)$$

Muitos fluidos exibem uma relação linear entre as componentes da tensão e o gradiente de velocidades. Tais fluidos são chamados fluidos newtonianos e incluem os fluidos comuns tais como água, óleo e ar. Se além da linearidade, requeremos que o fluido seja isotrópico (propriedades independentes da direção em uma dada posição) é possível relacionar as componentes da tensão e os gradientes da velocidade usando apenas duas propriedades do fluido, a viscosidade μ e o segundo coeficiente da viscosidade λ . As relações tensão-gradiente de velocidade, muitas vezes chamadas equações constitutivas são dadas por:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \nabla \cdot \mathbf{V}$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Para muitos gases e principalmente para gases monoatômicos, o segundo coeficiente da viscosidade é relacionado à viscosidade por:

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

uma condição conhecida como hipótese de Stokes. Com essa relação à média negativa das três tensões normais é igual à pressão, isto é,

$$-\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = p \quad (\text{A.11})$$

Usando-se as equações constitutivas, pode-se mostrar que isso é sempre verdade para um líquido no qual $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

Supondo um fluido homogêneo, substituindo as equações constitutivas nas equações diferenciais de movimento e usando a hipótese de Stokes chegamos à:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

As equações da continuidade e Navier-Stokes formam um sistema de equações diferenciais acopladas quase-lineares. Com estas três equações diferenciais e a equação diferencial da continuidade, têm-se quatro equações e quatro incógnitas, u , v , w e p . As técnicas de CFD visam a obtenção de soluções numéricas para estes problemas.

Bibliografia

- [1] MUNSON, B. R. *Fundamentos da mecânica dos fluidos*. 569 p. tradução da 3ª edição norte-americana Editora Edgar Blücher, São Paulo, 2004.
- [2] MENEZHINI, J. R. *Projetos de pesquisa no tópico geração e desprendimento de vórtices no escoamento ao redor de cilindros*. 213 p. Tese de Livre Docência, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- [3] POTTER, M.C., WIGGERT D.C., *Mecânica dos Fluidos*, tradução da 3ª edição norte-americana, Editora Thomson, 2004.
- [4] NASA, Nix.ksc.nasa.gov seção Aeronautics ,homepage da Nasa. Acesso em 7 de Março de 2010.
- [5] LIMA, A. A. *Comunicações Particulares*, 2010
- [6] FREGONESI, R. A. *Estudo do escoamento tridimensional ao redor de um agrupamento de cilindros em "tandem"*. 189 p. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- [7] YAMAMOTO, C. T. *Estudo do escoamento tridimensional ao redor de um agrupamento de cilindros lado a lado*. 206 p. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- [8] MENEZHINI, J. R. *Numerical simulation of bluff body flow control using a discrete vortex method*. 280p. Ph.D. thesis - Imperial College of Science, Technology and Medicine, London, 1993.
- [9] ANFLEX, *Manual Teórico do programa Anflex- Versão 5.7*. 212p. – Rio de Janeiro, Dezembro de 2001.
- [10] COHEN, M. e MANSSOUR, I. H. *OpenGL Uma abordagem prática e objetiva*. 478p. Novatec Editora, São Paulo, 2006.